Skript zur Vorlesung "Axiomatische Mengenlehre" bei Ralf Schindler, WS 02–03 + SS 03, Uni Wien.

Kap. 1 Modelle der Mengenlehre

Die Sprache der Mengenlehre hat das (2-stellige) $\in$ als einziges nichtlogisches Zeichen; demzufolge haben Modelle der (Sprache der) Mengenlehre die Form $(M; E)$, wobei M eine Menge ist und $E \subset M^2$ $\in$ interpretiert. Wir werden später auch Modelle betrachten, deren Trägermenge eine echte Klasse ist.

Def 1.1 A heißt transitiv gdw. für alle x, für alle y, $y \in x \wedge x \in A \Rightarrow y \in A$.

Konvention. Wenn M transitiv ist und wenn Σ eine Menge von Sätzen (d. Sprache d. Mengenlehre) ist, dann schreiben wir auch kurz $M \models \Sigma$ für $(M; \in\restriction M) \models \Sigma$ (wobei $\in\restriction M = \in \cap M^2 = \{(x,y) : x \in y \wedge y \in M\}$); entsprechend schreiben wir $M \models \Sigma[\beta]$ für $(M; \in\restriction M) \models \Sigma[\beta]$, wenn

Σ lediglich eine Menge von Formeln und β eine M-Belegung ist.

Def. 1.2 Eine Formel φ heißt Σ_0 gdw. $\varphi \in \Gamma$ für jede Menge Γ, für die folgendes gilt:

(a) alle atomaren Formeln sind in Γ,

(b) wenn $\bar\varphi, \bar\psi \in \Gamma$, dann ist auch jede junktorenlogische Verknüpfung von $\bar\varphi$ und $\bar\psi$ in Γ,

und (c) wenn $\bar\varphi \in \Gamma$ und x, y Variablen sind, dann sind auch $\forall x (x \in y \rightarrow \bar\varphi)$ und $\exists x (x \in y \wedge \bar\varphi)$ in Γ.

Konvention. Wir schreiben $\forall x \in y\, \bar\varphi$ für $\forall x (x \in y \rightarrow \bar\varphi)$ und $\exists x \in y\, \bar\varphi$ für $\exists x (x \in y \wedge \bar\varphi)$.

Lemma 1.3 Sei M transitiv, sei φ Σ_0 und sei β eine M-Belegung. Dann gilt

$$M \models \varphi[\beta] \iff V \models \varphi[\beta]$$

Beweis durch Induktion nach der Formelkomplexität: Wir behandeln nur den Fall $\varphi \equiv \exists x \in y\, \bar\varphi$.

"$\Leftarrow$": Ang., $V \models \varphi[\beta]$. Sei a so, daß $V \models x \in y \wedge \bar\varphi[\beta(x|a)]$. Sei $b = \beta(y)$. Da

β eine M-Belegung ist, gilt $b \in M$, also auch $a \in M$ wegen $V \models x \in y\,[\beta(x|a)]$. $\beta(x|a)$ ist also eine M-Belegung und es gilt nach Ind.-Vor. $M \models x \in y \wedge \bar{\varphi}\,[\beta(x|a)]$, und damit auch $M \models \varphi[\beta]$.

"$\Rightarrow$": Einfacher. $\dashv$

<u>Def.</u> 1.~~3~~4 Jede Σ_0 Formel heißt auch Π_0. Sei $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Die Formel φ heißt Σ_n gdw. $\varphi \equiv$ ~~[illegible]~~ $\exists x_1 \ldots \exists x_m \bar{\varphi}$, wobei $x_1, \ldots, x_m$ Variablen sind und $\bar{\varphi}$ Π_{n-1} ist; eine Formel φ heißt Π_n gdw. $\varphi \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_m \bar{\varphi}$, wobei $x_1, \ldots, x_m$ Variablen sind und $\bar{\varphi}$ Σ_{n-1} ist.

<u>Lemma</u> 1.5 Sei M transitiv, und sei β eine M-Belegung. Σ_1 Formeln sind ~~[illegible]~~ <u>aufsteigend absolut</u>, d.h.: wenn φ eine Σ_1 Formel ist, dann gilt $M \models \varphi[\beta] \Rightarrow V \models \varphi[\beta]$. Entsprechend sind Π_1 Formeln <u>absteigend</u> <u>absolut</u>, d.h.: wenn φ eine Π_1 Formel ist, dann gilt $V \models \varphi[\beta] \Rightarrow M \models \varphi[\beta]$.

Beweis d. 1. Teils: Sei φ Σ_1 und $M \models \varphi[\beta]$. Sei $\varphi \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_m \bar{\varphi}$, wobei $\bar{\varphi}$ Σ_0 $(= \Pi_0)$ ist. Seien $a_1, \ldots, a_m \in M$ so, daß $M \models \bar{\varphi}[\beta(x_1|a_1)\ldots(x_m|a_m)]$. Wegen Lemma 1.3 gilt $V \models \bar{\varphi}[\beta(x_1|a_1)\ldots(x_m|a_m)]$, also auch $V \models \varphi[\beta]$. $\dashv$

<u>Kor.</u> 1.6 $M \models$ "Extensionalitätsaxiom" für jedes transitive M.

Beweis: Das Extensionalitätsaxiom ist Π_1 (und gilt in V): $\forall x \forall y (\forall z \in x\; z \in y \wedge \forall z \in y\; z \in x \rightarrow x = y)$. $\dashv$

<u>Kor.</u> 1.7 $M \models$ "Fundierungsaxiom" für jedes transitive M.

Beweis: Das Fundierungsaxiom ist Π_1: es sagt $\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x\; y \cap x = \emptyset)$. $x \neq \emptyset$ kann geschrieben werden als $\exists z \in x\; z = z$, und $y \cap x = \emptyset$ kann geschrieben werden als $\neg \exists z \in y\; z \in x$. $\dashv$

<u>Kor.</u> 1.8 Sei M transitiv und $\omega \in M$. Dann gilt $M \models$ "Unendlichkeitsaxiom".

Beweis: Das Unendlichkeitsaxiom ist Σ_1; es hat die Gestalt $\exists x\, \bar\varphi$, wobei $\bar\varphi \equiv \emptyset \in x \wedge \forall y \in x\; y \cup \{y\} \in x$. $\emptyset \in x$ kann geschrieben werden als $\exists y \in x\, \neg \exists z \in y\; z = z$; $y \cup \{y\} \in x$ kann geschrieben werden als $\exists z \in x\, (\forall u \in y\; u \in z \wedge y \in z \wedge \forall u \in z\, (u \in y \vee u = y))$. $\bar\varphi$ ist also Σ_0. Sei nun β eine M-Belegung mit $\beta(x) = \omega$. Dann ist $M \models \bar\varphi[\beta]$ wegen Lemma 1.3, also $M \models \exists x\, \bar\varphi$. $\dashv$

Kor. 1.9 Sei M transitiv und abgeschlossen bzgl. $x, y \mapsto \{x,y\}$, d.h.: für alle $x, y \in M$ ist $\{x,y\} \in M$. Dann gilt $M \models$ "Paarmengenaxiom".

Beweis: Das Paarmengenaxiom hat die Gestalt $\forall x \forall y \exists z\; z = \{x,y\}$, wobei $z = \{x,y\}$ geschrieben werden kann als $x \in z \wedge y \in z \wedge \forall u \in z\, (u = x \vee u = y)$. $\dashv$

Kor. 1.10 Sei M transitiv und abgeschlossen bzgl. $x \mapsto \bigcup x$, d.h.: für alle $x \in M$ ist $\bigcup x \in M$. Dann gilt: $M \models$ "Vereinigungsmengenaxiom".

Beweis: Das Vereinigungsmengenaxiom hat die Gestalt

$\forall x \exists y\; y = \bigcup x$, wobei $y = \bigcup x$ geschrieben werden kann als $\forall z \in x\, \forall u \in z\; u \in y \wedge \forall u \in y\, \exists z \in x\; u \in z$. $\dashv$

Satz 1.11 Sei λ eine Limesordinalzahl mit $\lambda > \omega$. Dann gilt $V_\lambda \models ZC$.

Beweis: Mit $y \subset x \in V_\alpha$ gilt auch $y \in V_\alpha$, woraus das Aussonderungsaxiom in V_α folgt (für beliebiges α); mit $x \in V_\alpha$ gilt aber auch $\mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+1}$, woraus das Potenzmengenaxiom in V_λ folgt (für Limesordinalzahlen λ).
Mit $x \in V_\alpha$ ist jede Wohlordnung von x Element von $V_{\alpha+3}$. Dies kann leicht benutzt werden um zu zeigen, daß für Limesordinalzahlen λ der Wohlordnungssatz in V_λ gilt.
Der Rest ergibt sich mit Hilfe von Kor. 1.6–10. $\dashv$

Kor. 1.12 $ZC \not\vdash$ "Ersetzungsschema".

Beweis: Sei $\lambda = \omega + \omega$. Dann gilt $V_\lambda \models ZC$ mit Satz 1.11. In V_λ gilt aber nicht das Ersetzungsschema (!). $\dashv$

<u>Satz</u> 1.13 $V_\omega \models ZFC \setminus$ "Unendlichkeitsaxiom".

<u>Def.</u> 1.14 Sei Γ eine Menge von Formeln, und sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Eine Formel φ heißt Σ_n^Γ gdw. es eine Σ_n Formel ψ gibt mit $\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Eine Formel φ heißt Π_n^Γ gdw. es eine Π_n Formel ψ gibt mit $\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Eine Formel φ heißt Δ_n^Γ gdw. φ sowohl Σ_n^Γ als auch Π_n^Γ ist.

<u>Satz</u> 1.14 Seien M und N beide transitiv mit $M \subset N$. Sei Γ eine Menge von Formeln, und gelte für jede M-Belegung β sowohl $M \models \Gamma[\beta]$ als auch $N \models \Gamma[\beta]$. Sei φ Δ_1^Γ. Dann gilt für jede M-Belegung β

$$M \models \varphi[\beta] \iff N \models \varphi[\beta].$$

Beweis: Sei ψ Σ_1 und sei ψ' Π_1 mit $\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ und $\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi'$.
Sei $M \models \varphi[\beta]$. Dann gilt $M \models \psi[\beta]$, da $M \models \Gamma[\beta]$. Also gilt $N \models \psi[\beta]$ wegen Lemma 1.5. Damit gilt $N \models \varphi[\beta]$ wegen $N \models \Gamma[\beta]$.

Sei umgekehrt $N \models \varphi[\beta]$. Dann gilt $N \models \psi'[\beta]$ wegen $N \models \Gamma[\beta]$, also auch $M \models \psi'[\beta]$ wegen Lemma 1.5. Damit gilt auch $M \models \varphi[\beta]$ wegen $M \models \Gamma[\beta]$. $\dashv$

<u>Def.</u> 1.15 Sei R eine 2-stellige Relation auf der Menge x. R heißt <u>fundiert</u> gdw. für alle $y \subset x$ mit $y \neq \emptyset$ ein $z \in y$ existiert, so daß für alle u mit $(u,z) \in R$ gilt: $u \notin y$ (d.h.: z ist R-<u>minimal</u> in y).

<u>Satz</u> 1.16 Die Formel "y ist eine fundierte Relation auf x" ist Δ_1^{ZFC}.

Beweis: "y ist eine Relation auf x" kann geschrieben werden als $\forall z \in y\ \exists u \in x\ \exists v \in x\ z = (u,v)$. $z = (u,v)$ ist Σ_0 (vgl. Beweis von 1.9), womit auch "y ist Relation auf x" Σ_0 ist.
"y ist fundiert" hat die Gestalt $\forall z\ (z \subset x \wedge z \neq \emptyset \rightarrow \exists u \in z\ \forall v \in z\ \neg (v,u) \in y)$, ist also Π_1. Wir zeigen nun, daß diese Formel Σ_1^{ZFC} ist.

Sei x eine Menge, und sei R eine fundierte Relation auf x. Dann existiert die <u>Rang-funktion</u> ρ_R, d.h.: es existiert eine Ordinalzahl α und es existiert eine Funktion $\rho : D \to \alpha$ mit Urbildbereich $D = \{ y \in x : \exists z \in x \ (y,z) \in R \vee (z,y) \in R \}$, die rekursiv definiert ist durch

$$\rho(y) = 0 , \quad \text{falls } \neg \exists z \ (z,y) \in R , \quad \text{und}$$
$$\rho(y) = \sup \{ \rho(z)+1 : (z,y) \in R \} , \quad \text{sonst}.$$

Die Existenz einer solchen Funktion ist in ZFC mit Hilfe des Rekursionssatzes beweisbar.

Wir können also "y ist fundiert" durch die folgende in ZFC äquivalente Formel wiedergeben:

$$\exists f \ \exists z \ (z \text{ ist eine Ordinalzahl} \wedge$$
$$f \text{ ist eine Funktion}, \ f : x \to z \ \wedge$$
$$f(u) < f(v) \leftrightarrow (u,v) \in y \quad \text{für } u,v \in x)$$

"z ist eine Ordinalzahl" kann geschrieben werden als

$\forall u \in z \ \forall v \in z \ (u \in v \vee u = v \vee v \in u)$.

"$f : x \to z$" kann geschrieben werden als

$\forall u \in x \ \exists v \in z \ \big((u,v) \in f \ \wedge \forall v' \in z \ (u,v') \in f \to v = v' \big)$

$\wedge \ \forall u \in f \ \exists \bar{u} \in x \ \exists \bar{v} \in z \ \ u = (\bar{u}, \bar{v})$.

Die Matrix der o.g. Formel ist also Σ_0.

Damit ist "y ist fundierte Relation auf x" Δ_1^{ZFC}.

<u>Kor.</u> 1.17 Sei M ein transitives Modell von ZFC, und seien $x, R \in M$. Dann gilt:

R ist fundierte Relation auf x gdw.

$$M \models \text{"} R \text{ ist fundierte Relation auf } x \text{"} .$$

<u>Def.</u> 1.18 Sei x eine transitive Menge. Dann bezeichnet $\mathrm{Def}(x)$ die Menge aller $y \subset x$, für die eine Formel φ und eine x-Belegung β existieren mit

$$y = \{ z \in x : x \models \varphi [\beta (v_0 | z)] \} .$$

<u>Def.</u> 1.19 Sei x eine transitive Menge, $y \subset x$. Dann heißt (x, y) <u>fügsam</u> gdw. $z \cap y \in x$ für alle $z \in x$.

<u>Lemma</u> 1.20 Sei M eine transitive Menge, und sei (M, y) fügsam für jedes $y \in \mathrm{Def}(M)$. Dann gilt $M \models$ "Aussonderungsschema".

Beweis: Sei $x \in M$, und sei φ eine Formel, in der z nicht (frei) vorkommt. Sei β eine M-Belegung. Sei

$$y = \{ u \in M : M \models \varphi[\beta(v_0|u)] \}.$$

Dann ist $y \cap x = \{ u \in x : M \models \varphi[\beta(v_0|u)] \} \in M$, da (M, y) fügsam ist. $y \cap x$ bezeugt aber, daß $M \models \exists z \, \forall v_0 \, (v_0 \in z \leftrightarrow v_0 \in v_1 \wedge \varphi)[\beta(v_1|x)]$. $\dashv$

Der folgende Satz bietet eine Anwendung von Lemma 1.5 und Satz 1.16. Der folgende Beweis verarbeitet auch den Beweis des Gödelschen Vollständigkeitssatzes. Der Satz geht auf Shoenfield zurück.

<u>Satz</u> 1.21 Sei M ein transitives Modell von ZFC mit $\omega_1 \subset M$. Sei φ ein Σ_1 Satz. Dann gilt:

$$V \models \varphi \Rightarrow M \models \varphi.$$

Beweis: Wir erweitern zunächst die Sprache der Mengenlehre durch Hinzunahme von Konstanten $\dot{c}_0, \dot{c}_1, \dot{c}_2, \ldots$ Sei $(\varphi_i : i < \omega)$ eine rekursive Aufzählung aller Sätze der erweiterten Sprache. Wir bezeichnen mit S die Menge aller Folgen $(\psi_i, \rho_i : i < N)$, wobei

- $N < \omega$,
- $\psi_i \equiv \varphi_i$ oder $\psi_i \equiv \neg \varphi_i$,
- wenn $\psi_i \equiv \exists v_\ell \, \psi$ für eine Variable v_ℓ und eine Formel ψ, dann existiert eine Konstante $\dot{c}_q$ mit $\rho_i \equiv \psi^{v_\ell}_{\dot{c}_q}$ (hier ist $\psi^{v_\ell}_{\dot{c}_q}$ das Resultat der Ersetzung aller freien Vorkommnisse von v_ℓ in ψ durch $\dot{c}_q$); wenn ψ_i nicht von dieser Form ist, dann ist $\rho_i \equiv \exists v_0 \, v_0 = v_0$, und
- $\{\varphi\} \cup \{\psi_i : i < N\} \cup \{\rho_i : i < N\}$ $\cup\{\text{Extensionalitätsaxiom}\}$ ist konsistent.

Wir bezeichnen mit S^* die Menge aller Paare (s, f) mit

- $s \in S$, etwa $s = (\psi_i, \rho_i : i < N)$,
- $f : \{\dot{c}_0, \dot{c}_1, \ldots, \dot{c}_{N-1}\} \to \omega_1$, und
- wenn $\dot{c}_j \in \dot{c}_k$ in der Menge $\{\psi_i : i < N\} \cup \{\rho_i : i < N\}$ liegt, dann ist $f(\dot{c}_j) < f(\dot{c}_k)$ für $j, k < N$.

Für $(s, f), (\bar{s}, \bar{f}) \in S^*$ mit $s = (\psi_i, \rho_i : i < N)$ und $\bar{s} = (\bar{\psi}_i, \bar{\rho}_i : i < \bar{N})$ setzen wir $(\bar{s}, \bar{f}) \, R \, (s, f)$ gdw. $\bar{N} = N+1$, $\psi_i = \bar{\psi}_i$ für $i < N$, $\rho_i = \bar{\rho}_i$ für $i < N$ und $f(\dot{c}_j) = \bar{f}(\dot{c}_j)$ für $i < N$. Offensichtlich ist

R eine Relation auf S^*. Man beachte, daß sowohl $S^* \in M$ als auch $R \in M$ (wir nehmen hierfür o.B.d.A. an, daß die [Gödelnummern von] Sätzen natürliche Zahlen sind; wir benutzen $\omega_1 \subset M$).

Wir nehmen nun an, daß $V \models \varphi$.

<u>Beh.</u> 1 $V \models R$ ist nicht fundiert.

φ ist von der Gestalt $\exists v_1 \dots \exists v_k \psi$, wobei ψ Σ_0 ist. Sei β eine V-Belegung mit $V \models \psi[\beta]$. Sei α so, daß $\{\beta(v_1), \dots, \beta(v_k)\} \subset V_\alpha$. Aufgrund des Satzes von Mostowski existiert dann ein abzählbares elementares Submodell $X \prec V_\alpha$ mit $\{\beta(v_1), \dots, \beta(v_k)\} \subset X$ und ein transitives $\overline{M}$ mit $(\overline{M}; \in) \cong (X; \in)$. Damit gilt $\overline{M} \models \varphi$, wobei $\overline{M}$ abzählbar und transitiv ist. Sei nun $\overline{M} = \{a_i : i < \omega\}$, und sei $\tilde{f}(a_i)$ das kleinste β mit $a_i \subset V_\beta$ (i.e., der Rang von a_i).

Wir setzen $\psi_i \equiv \varphi_i$, falls $\overline{M} \models \varphi_i$ (wobei die Konstanten $\dot{c}_j$ durch $a_j \in \overline{M}$ interpretiert werden), andernfalls setzen wir $\psi_i \equiv \neg\varphi_i$. Falls $\psi_i \equiv \exists v_\ell \psi$ dann setzen wir $\rho_i \equiv \psi^{v_\ell}_{\dot{c}_k}$ für ein k mit

$\overline{M} \models \psi[\beta(v_\ell / a_k)]$ (für beliebiges β); andernfalls setzen wir $\rho_i \equiv \exists v_0\, v_0 = v_0$.

Damit ist für jedes $N < \omega$ $(\psi_i, \rho_i : i < N) \in S$. Es gilt aber sogar für jedes $N < \omega$

$$((\psi_i, \rho_i : i < N), \tilde{\tilde{f}} \upharpoonright \{\dot{c}_0, \dot{c}_1, \dots, c_{N-1}\}) \in S^*,$$

wobei $\tilde{\tilde{f}}(\dot{c}_j) = \tilde{f}(a_j)$: wenn nämlich $\dot{c}_j \in \dot{c}_k$ in $\{\psi_i : i < N\} \cup \{\rho_i : i < N\}$ liegt, dann ist $\overline{M} \models \dot{c}_j \in \dot{c}_k$, i.e. $a_j \in a_k$, und damit $\tilde{f}(a_j) < \tilde{f}(a_k)$, also $\tilde{\tilde{f}}(\dot{c}_j) < \tilde{\tilde{f}}(\dot{c}_k)$. ⊣(Beh. 1)

<u>Beh.</u> 2 $M \models \varphi$.

Aufgrund von Satz 1.16 ist R nicht fundiert in M. Wir erhalten damit eine Folge $((s_k, f_k) : k < \omega)$, wobei $(s_k, f_k)\, R\, (s_{k-1}, f_{k-1})$ für $k > 0$, und $((s_k, f_k) : k < \omega) \in M$. Wie im Beweis des Gödelschen Vollständigkeitssatzes bilden wir nun aus Äquivalenzklassen von Konstanten ein Modell $\tilde{M}$.

Sei $s_k = (\varphi_i^k, \rho_i^k : i < k)$. Sei $\varphi_i = \varphi_i^k$ für $k > i$ und $\rho_i = \rho_i^k$ für $k > i$. Dann gilt

$$\tilde{M} \models \{\varphi\} \cup \{\varphi_i : i < \omega\} \cup \{\rho_i : i < \omega\}.$$

Sei $\tilde{f}(\dot{c}_j) = f_k(\dot{c}_j)$ für $k > j$, und sei $\tilde{\tilde{f}}([\dot{c}_j]) = \tilde{f}(c_j)$ (wobei $[\dot{c}_j]$ die Äquivalenzklasse von $\dot{c}_j$ bezeichnet).

Wenn $\tilde{M} \models \dot{c}_j \in \dot{c}_k$, dann ist $\tilde{\tilde{f}}([\dot{c}_j]) < \tilde{\tilde{f}}([\dot{c}_k])$.

Damit ist $\tilde{M}$ fundiert und es gibt ein transitives $\tilde{\tilde{M}}$ mit $(\tilde{\tilde{M}}; \in) \cong (\tilde{M}; \dot{\in}^{\tilde{M}})$ aufgrund des Satzes von Mostowski.*) Da $((s_k, f_k) : k < \omega) \in M$, gilt auch $\tilde{M} \in M$, und somit auch $\tilde{\tilde{M}} \in M$. Darüberhinaus haben wir $\tilde{\tilde{M}} \models \varphi$. Wir können endlich Lemma 1.5 <u>in</u> M anwenden und erhalten

$M \models \varphi$. $\dashv$ (Beh. 2)

$\dashv$

Bemerkung: Eine Variante des angegebenen Beweises zeigt das folgende: wenn φ_1 eine Σ_1 Formel ist und wenn β eine M-Belegung ist, wobei $\beta(v_k)$ <u>erblich abzählbar</u> in M ist für jedes k, (und $M \models ZFC$ ist transitiv mit $\omega_1 \subset M$), dann gilt $V \models \varphi_1[\beta] \Rightarrow M \models \varphi_1[\beta]$. Diese Aussage wird aber (nachweislich) falsch, wenn man nicht mehr verlangt, daß alle $\beta(v_k)$ erblich abzählbar in M sind!

---

*) In $\tilde{M}$ gilt das Extensionalitätsaxiom!