Kap. 3 Kondensation

Das Kondensationslemma 2.17 spricht über Limesordinalzahlen $\alpha > \omega$. Wir wollen nun eine stärkere Version dieses Lemmas beweisen.

Die Beschränkung von 2.17 auf Limesordinalzahlen α beruht darauf, daß im Beweis dieses Lemmas (indirekt) 2.13 zitiert wird, also letzlich darauf, daß lediglich für Limesordinalzahlen α gilt, daß $L_\alpha \models$ Paarmengenaxiom. Wir wollen nun eine Paarmengenbildung einführen, die dieses Problem umgeht.

Zur Erinnerung: $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$.

<u>Def.</u> 3.1 $x^* = (x \setminus \omega) \cup \{n+1 : n \in x \cap \omega\} \cup \{0\}$.

Offensichtlich gilt: $0 \in x^*$ (insb. $x^* \neq \emptyset$) für alle x, $x \mapsto x^*$ ist injektiv, und $x \mapsto x^*$, eingeschränkt auf L_α, ist über L_α definierbar für alle $\alpha \geq \omega$.

<u>Def.</u> 3.2 Wir definieren rekursiv $x, y \mapsto (x,y)_n$ für $n < \omega$ wie folgt.

$(x,y)_0 = (x,y)$, und

$(x,y)_{n+1} = \{(u,v)_n : u \in x^* \wedge v \in y^*\}$.

<u>Lemma</u> 3.3 Für alle $n < \omega$ gilt $(x,y)_n = (x',y')_n$ gdw. $x = x'$ und $y = y'$.

Beweis durch Induktion nach n: $n = 0$ ✓. Sei die Behauptung für n gezeigt; wir wollen sie für $n+1$ zeigen. "$\Leftarrow$" ist trivial.

"$\Rightarrow$": Sei $(x,y)_{n+1} = (x',y')_{n+1}$, d.h. $\{(u,v)_n : u \in x^* \wedge v \in y^*\} = \{(u,v)_n : u \in x'^* \wedge v \in y'^*\}$. Sei $u_0 \in x^*$; da $y^* \neq \emptyset$ ex. $v_0 \in y^*$, und es gilt $(u_0, v_0)_n \in (x,y)_{n+1}$, also auch $(u_0,v_0)_n \in (x',y')_{n+1}$; damit gilt mit Hilfe der Ind. Vor. $u_0 \in x'^*$ (und $v_0 \in y'^*$). Wir haben gesehen, daß $x^* \subset x'^*$; entsprechend sieht man $x'^* \subset x^*$, also $x^* = x'^*$, und damit $x = x'$. Analog zeigt man $y = y'$. $\dashv$

<u>Lemma</u> 3.4 Sei α eine Limesordinalzahl. Für jedes $k < \omega$ gilt:

(1) $x, y \in L_{\alpha+k} \Rightarrow (x,y)_k \in L_{\alpha+k}$, und

(2) "$z = (x,y)_k$" ist über $L_{\alpha+n}$ definierbar, für alle $n \geq k$.

Beweis durch simultane Induktion nach k. $k = 0$ ✓

Angenommen, (1) und (2) gelten für k.

(1) gilt für $k+1$: Seien $x, y \in L_{\alpha+k+1}$. Seien φ_x und $\vec{z}_x \in L_{\alpha+k}$ so, daß

$$x^* = \{u \in L_{\alpha+k} : L_{\alpha+k} \models \varphi_x(u, \vec{z}_x)\},$$

und seien φ_y und $\vec{z}_y \in L_{\alpha+k}$ so, daß

$$y^* = \{u \in L_{\alpha+k} : L_{\alpha+k} \models \varphi_y(u, \vec{z}_y)\}.$$

Dann gilt $(x,y)_{k+1} = \{(u,v)_k : u \in x^* \wedge v \in y^*\} =$

$\{w \in L_{\alpha+k} : \exists u \in L_{\alpha+k} \exists v \in L_{\alpha+k} (w = (u,v)_k \wedge u \in x^* \wedge v \in y^*)\}$,

da $u \in x^* \Rightarrow u \in L_{\alpha+k}$, $v \in y^* \Rightarrow v \in L_{\alpha+k}$, also nach Induktion, Teil (1), $(u,v)_k \in L_{\alpha+k}$; nach Induktion, Teil (2), ist dann $(x,y)_{k+1} =$

$\{w \in L_{\alpha+k} : L_{\alpha+k} \models \exists u \exists v (w = (u,v)_k \wedge \varphi_x(u, \vec{z}_x) \wedge \varphi_y(v, \vec{z}_y))\}$,

also $(x,y)_{k+1} \in L_{\alpha+k+1}$.

(2) gilt für $k+1$: Es ist $z = (x,y)_{k+1}$ gdw. $z = \{(u,v)_k : u \in x^* \wedge v \in y^*\}$. Sei $n \geq k+1$. Die gewünschte Behauptung folgt leicht aus Ind., Teil (1) für k und Ind., Teil (2) für k.

⊣

Def. 3.5 $\quad x \times_k y = \{(u,v)_k : u \in x \wedge v \in y\}$.

Es gilt also $x \times_k y = (x^*, y^*)_{k+1}$. Insbesondere zeigt der Beweis von 3.4 (1):

Lemma 3.6 Sei α eine Limesordinalzahl. Für jedes $k < \omega$ gilt: $x, y \in L_{\alpha+k+1} \Rightarrow x \times_k y \in L_{\alpha+k+1}$.

Sei $k < \omega$. Die Theorie BS^k besitzt die folgenden Axiome: Extensionalität, Fundierung, Paarmengenaxiom in der Form

$$\forall x \forall y \exists z \; z = (x,y)_k ,$$

Vereinigungsmengenaxiom, Axiom d. Kartesischen Produkts in der Form

$$\forall x \forall y \exists z \; z = x \times_{k \dot{-} 1} y \; ^{*)},$$

Σ_0 – Komprehension, und Unendlichkeitsaxiom.

Jetzt ergeben 2.3, 1.6, 1.7, 3.4, 1.10, 3.6 (und 2.10), sowie 2.8 und 1.8 die folgende Aussage:

---

*) Hier ist $k \dot{-} 1 = k-1$ für $k > 0$ und $= 0$ für $k = 0$.

Satz 3.7 Sei $\alpha \geq \omega$ eine Limesordinalzahl. Dann gilt für alle $k < \omega$ mit $\alpha + k > \omega$

$$L_{\alpha+k} \models BS^k .$$

Man kann nun zeigen (vgl. 2.11):

Satz 3.8 Sei $k < \omega$. Die Formel "M ist transitiv, e ist die Gödelnummer einer Formel φ, die die Variablen $v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell}$ frei enthält, $f : \{v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell}\} \to M$ (insbesondere $f \subset \{v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell}\} \times_k M$), und es gilt $M \models \varphi[\beta]$ für eine/jede M-Belegung β mit $\beta(v_{i_1}) = f(v_{i_1}), \dots, \beta(v_{i_\ell}) = f(v_{i_\ell})$" ist $\Delta_1^{BS^k}$.

Wir schreiben wieder kurz "$M \dot{\models} \ulcorner\varphi\urcorner[f]$" ist $\Delta_1^{BS^k}$.

Korollar 3.9 Die Formel "$y = Def(x)$" ist $\Delta_1^{BS^k}$ für jedes $k < \omega$.

Wir wollen nun Versionen von 2.15 und 2.16 für beliebige Ordinalzahlen $\alpha > \omega$ beweisen.
Sei $k < \omega$. Falls $k = 0$, dann sei Φ_k der Satz $\forall y \exists x \exists \beta (x = L_\beta \wedge y \in x)$ so, wie er auf Seite 26 konstruiert wurde.

Sei nun $k > 0$. Wir bezeichnen dann mit Φ_k den folgenden Satz:

"$\forall y \exists \beta$ β ist eine Limesordinalzahl und $\exists (\ell_\gamma : \gamma \leq \beta)$ mit: $\ell_0 = \emptyset$, $\ell_1 = \{\emptyset\}$, $\ell_{\gamma+1} = Def(\ell_\gamma)$ für $\gamma + 1 < \beta$, $\ell_\lambda = \bigcup_{\gamma < \lambda} \ell_\gamma$ für Limesordinalzahlen $\lambda \leq \beta$, und $\exists \tilde{\ell}_0 \exists \tilde{\ell}_1 \dots \exists \tilde{\ell}_{k-1}$ mit: $\tilde{\ell}_0 = \bigcup_{\gamma<\beta} \ell_\gamma \wedge \tilde{\ell}_1 = Def(\tilde{\ell}_0) \wedge \dots \wedge \tilde{\ell}_{k-1} = Def(\tilde{\ell}_{k-2})$, und es gilt eine Formel φ, die die Variablen $v_0, \dots, v_\ell$ frei enthält und es gibt ein $f : \{v_1, \dots, v_\ell\} \longrightarrow \tilde{\ell}_{k-1}$ so daß

$$y = \{u \in \tilde{\ell}_{k-1} : \tilde{\ell}_{k-1} \dot{\models} \ulcorner\varphi\urcorner[v_0 \mapsto u \,^\frown f]\} ."$$

Hierbei bezeichne $(\ell_\gamma : \gamma < \beta)$ eine Folge, die mit Hilfe der gewöhnlichen Paarbildungsfunktion gebildet wird, $f : \{v_1, \dots, v_\ell\} \to \tilde{\ell}_{k-1}$ bezeichnet eine Funktion, die mit Hilfe der Paarbildungsfunktion $a, b \mapsto (a,b)_k$ gebildet wird, und $v_0 \mapsto u \,^\frown f$ bezeichnet die Erweiterung von f (auch mittels $a, b \mapsto (a,b)_k$ gebildet), die an der Stelle v_0 den Wert u annimmt.

Mit Hilfe von 3.9 sieht man leicht, daß für

$k \geq 0$ der Satz Φ_k in BS^k äquivalent ist zu einem Satz der Form

$$\forall y\, \exists z_1 \ldots \exists z_j\; \varphi(y, z_1, \ldots, z_j),$$

wobei φ Σ_0 ist; d.h.

<u>Lemma</u> 3.10 Für $k \geq 0$ ist Φ_k $\Pi_2^{BS^k}$.

Es ist einfach zu sehen:

<u>Satz</u> 3.11 Sei $\alpha \geq \omega$ eine Limesordinalzahl, und sei $k < \omega$ so, daß $\alpha + k > \omega$. Dann gilt $L_{\alpha+k} \models \Phi_k$.

Beweis: Für $k = 0$ ist dies 2.15. Sei $k > 0$. Dann ist $(L_\gamma : \gamma < \alpha) \in L_{\alpha+1} \subset L_{\alpha+k}$ (dies zeigt man mit Hilfe von 2.14 und 2.12); weiters gilt $L_\alpha, \ldots, L_{\alpha+k-1} \in L_{\alpha+k}$, womit 3.11 folgt. $\dashv$

<u>Satz</u> 3.12 Sei $k \geq 0$, sei M transitiv, und sei $M \models BS^k$. Wenn $M \models \Phi_k$ dann existiert eine Limeszahl α mit $\alpha + k > \omega$ und $M = L_{\alpha+k}$.

Beweis: Für $k = 0$ ist dies 2.16, sei also $k > 0$.

Sei $\beta = M \cap OR$. Sei $y \in M$. Aufgrund von $M \models BS^k$, $M \models \Phi_k$ und 3.9 existiert dann eine Folge $(L_\gamma : \gamma \leq \delta)$ mit: $L_\gamma \in M$ für alle $\gamma \leq \delta$, und y ist über L_δ definierbar. Es muß aber gelten $\delta < \beta$ (da sonst $\beta \in M$).

D.h. jedes $y \in M$ ist über einem L_δ mit $\delta < \beta$ definierbar; d.h. $M \subset L_\beta$.

Sei $\xi < \beta$. Aufgrund von $M \models BS^k$, $M \models \Phi_k$ und 3.9. existiert dann eine Limesordinalzahl α, so daß ξ über $L_{\alpha+k-1}$ definierbar ist, wobei ~~also~~ $L_{\alpha+k-1} \in M$, insbesondere also $\alpha+k-1 < \beta$. Dann ist aber auch $\xi \leq \alpha+k-1$. ~~also~~ Dies ergibt $\beta = \alpha + k$. Dann ist aber $L_{\alpha+k-1} \in M$, und somit mit Hilfe von $M \models \Sigma_0$ Komprehension $L_\beta = L_{\alpha+k} = \mathrm{Def}(L_{\alpha+k-1}) \subset M$.

Wir haben gezeigt, daß $M = L_\beta$, wobei $\beta = \alpha + k$ für eine Limesordinalzahl α. $\dashv$

<u>Satz</u> 3.13 (Kondensationslemma). Sei $\alpha > \omega$ eine beliebige Ordinalzahl, sei M transitiv, und sei

$$\pi : M \xrightarrow[\Sigma_1]{} L_\alpha . \quad *)$$

Dann ist $M = L_{\bar\alpha}$, wobei $\bar\alpha = M \cap OR \leq \alpha$.

Beweis: ~~...~~ Sei $\alpha = \beta + k$, wobei $\beta \geq \omega$ eine Limesordinalzahl ist und $k < \omega$. Es gilt $L_\alpha \models BS^k$ und $L_\alpha \models \Phi_k$. Wie im Beweis von 2.17 ist es leicht zu sehen, daß es einen Π_2 Satz ψ_{BS^k} gibt mit folgender Eigenschaft: Für transitives N ist $N \models \psi_{BS^k}$ gdw. $N \models BS^k$. Wegen 3.10 gibt es dann aber einen Π_2 Satz $\tilde\psi$ mit: Für transitives N ist $N \models \tilde\psi$ gdw. $N \models BS^k$ und $N \models \Phi_k$, und damit $N \models \tilde\psi$ gdw. ~~...~~ $N = L_{\beta+k}$ für eine Limeszahl β (wegen 3.11 und 3.12). Sei $\tilde\psi$ von der Gestalt

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m \, \tilde{\tilde\psi}(x_1, \ldots, x_m),$$

wobei $\tilde{\tilde\psi}$ Σ_1 ist.

*) D.h. π ist Σ_1-elementar (in 2.17 war es als Σ_2-elementar vorausgesetzt)

Nun gilt $L_\alpha \models \tilde\psi$. Wir wollen zeigen:

<u>Beh.</u> $M \models \tilde\psi$.

Beweis: Seien $y_1, \ldots, y_m \in M$. Dann gilt $L_\alpha \models \tilde{\tilde\psi}(\pi(y_1), \ldots, \pi(y_m))$, da $L_\alpha \models \tilde\psi$. Da π Σ_1 elementar ist und $\tilde{\tilde\psi}$ Σ_1 ist, gilt also $M \models \tilde{\tilde\psi}(y_1, \ldots, y_m)$. Wir haben gezeigt, daß $M \models \tilde\psi$.
⊣ (Beh.)

Damit ist $M = L_{\beta+k}$ für eine Limeszahl β. Da $L_{\beta+k} \cap OR = \beta + k$ muß schließlich gelten: $M = L_{\bar\alpha}$, wobei $\bar\alpha = M \cap OR \leq \alpha$.
⊣

Derselbe Beweis zeigt:

<u>Satz</u> 3.14 Sei $\alpha > \omega$ eine beliebige Ordinalzahl, sei M transitiv, und sei

$$\pi : L_\alpha \xrightarrow[\Sigma_2]{} M .$$

Dann ist $M = L_{\alpha'}$, wobei $\alpha' \geq \alpha$, $\alpha' = M \cap OR$.