Klausur zur Vorlesung
Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, WiSe 2008-09

Prof. Dr. Ralf Schindler, Dr. Gunter Fuchs Freitag, 6. Februar 2009

Aufgabe 1. Definieren Sie folgende Begriffe:

1. A ist ein (endlicher, deterministischer) Automat, (2 P.)
2. T ist eine Turing-Maschine, (2 P.)
3. Die Laufzeit einer Turing-Maschine, (2 P.)
4. Die Klassen P und NP. (2 P.)

Aufgabe 2.

1. Zeigen Sie, dass die folgende aussagenlogische Formel eine Tautologie ist:
$$(\neg A_3 \to A_1) \leftrightarrow \neg(\neg A_1 \wedge \neg A_3).$$
(2 P.)
2. Zeigen Sie, dass die folgende aussagenlogische Formel erfüllbar ist:
$$\neg((A_0 \wedge A_1) \vee (A_0 \wedge A_2)) \wedge (A_0 \vee A_1) \wedge (A_2 \to A_1)$$
(2 P.)
3. Geben Sie eine zu der Formel aus der vorigen Teilaufgabe äquivalente Formel in disjunktiver Normalform an. (2 P.)
4. Geben Sie eine zu dieser Formel äquivalente Formel in konjunktiver Normalform an. (2 P.)

Aufgabe 3.

1. Geben Sie explizit Automaten an, die die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$ akzeptieren:
   (a) $\{w \mid w$ enthält die Zeichenfolge 110 zwei mal$\}$, (3 P.)
   (b) $\{w \mid w$ beginnt oder endet mit $0\}$. (3 P.)
   (c) $\{w \mid w$ enthält eine durch 3 teilbare Anzahl von 1en$\}$. (2 P.)

   Sie können die Automaten auch in Form von Diagrammen angeben.
2. Seien $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ und $A' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F'\rangle$ Automaten. Geben Sie einen Automaten $B = \langle \tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{q}_0, \tilde{F}\rangle$ an, der ein Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann akzeptiert, wenn A oder A' das Wort w akzeptiert. (4 P.)

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die folgende Sprache nicht regulär ist:
$$\{0^{3n}1^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
(4 P.)

Aufgabe 5. Sei $\Sigma = \{0,1\}$.

1. Für ein Wort $w = x_0x_1 \dots x_n$ aus Σ^* sei w^- das folgende Wort:

$$w^- = (1-x_n)(1-x_{n-1})\dots(1-x_0).$$

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die Sprache

$$\{ww^- \mid w \in \Sigma^*\}$$

generiert. (3 P.)

2. Zeigen Sie, dass die Sprache

$$\{ww \mid w \in \Sigma^*\}$$

nicht kontextfrei ist. (5 P.)

Aufgabe 6. Sei $\Sigma = \{0,1\}$. Geben Sie explizit eine Turing-Maschine an, die die folgende Sprache über Σ entscheidet:

$$\{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ kommt das Zeichen 0 genauso oft vor wie das Zeichen 1.}\}.$$

(5 P.)

Aufgabe 7.

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Probleme in P sind:

   (a)
$$4-\mathsf{CLIQUE} = \{G \mid G \text{ ist ein Graph mit einer 4-Clique}\},$$

   (4 P.)

   (b)
$$\mathsf{PATH} = \{(G,a,b,c) \mid G \text{ ist ein Graph, } a,\, b \text{ und } c \text{ sind Knoten in } G\text{, und es gibt einen Pfad von } a \text{ nach } c\text{, der } b \text{ passiert.}\}$$

   (4 P.)

2. Sei X eine endliche Menge und $f : X \times X \to \mathbb{N}$ eine symmetrische Funktion, d.h., $f(x,y) = f(y,x)$ für alle x, $y \in X$. Eine Tour durch X ist eine Folge $x_0, x_1, \dots, x_n$, in der jedes Element von X genau einmal vorkommt. Die f-Länge einer solchen Tour ist $f(x_0,x_1) + f(x_1,x_2) + \dots + f(x_{n-1},x_n) + f(x_n,x_0)$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathsf{SALESMAN} = \{(f,n) \mid f \text{ ist eine symmetrische Funktion auf einer endlichen Menge } X\text{, zu der es eine Tour mit } f\text{-Länge kleiner als } n \text{ gibt}\}$$

   in NP ist. (5 P.)

3. Sei Σ ein Alphabet mit hinreichend vielen Symbolen. Zeigen Sie, dass es eine Turing-Maschine T mit Eingabealphabet Σ gibt, für die es keine Turing-Maschine S mit dem gleichen Eingabealphabet gibt, so dass gilt:

$$\forall w \in \Sigma^* \quad (S(w)\downarrow \iff T(w)\uparrow).$$

   (5 P.)

Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass das folgende Problem NP-vollständig ist:

$$\mathsf{Clique}^{\frac{1}{3}} = \{G \mid \text{Es gibt ein } n\text{, so dass } G \text{ ein Graph mit } 3n \text{ Knoten ist, der eine } n\text{-Clique hat.}\}$$

(5 P.)