
**Wiederholungsklausur zur Vorlesung
Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, WiSe 2008-09**

Prof. Dr. Ralf Schindler, Dr. Gunter Fuchs

Mittwoch, 8. April 2009

Aufgabe 1. Definieren Sie folgende Begriffe:

1. ein regulärer Ausdruck, (2 P.)
2. L ist eine rekursive Sprache, (2 P.)
3. L ist eine rekursiv aufzählbare Sprache, (2 P.)
4. Die Sprache L_1 ist auf die Sprache L_2 Turing-reduzierbar. (2 P.)

↪ **Aufgabe 2.**

1. Zeigen Sie, dass die folgende aussagenlogische Formel eine Tautologie ist:

$$\neg((\neg A_3 \rightarrow A_1) \wedge (\neg A_1 \wedge \neg A_3)).$$

(2 P.)

2. Zeigen Sie, dass die folgende aussagenlogische Formel erfüllbar ist:

$$\neg((A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_0)) \wedge (A_1 \vee A_2) \wedge (A_0 \rightarrow A_2).$$

(2 P.)

3. Geben Sie eine zu der Formel aus der vorigen Teilaufgabe äquivalente Formel in disjunktiver Normalform an. (2 P.)
4. Geben Sie eine zu dieser Formel äquivalente Formel in konjunktiver Normalform an. (2 P.)

Aufgabe 3.

1. Geben Sie explizit Automaten an, die die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$ akzeptieren:

- (a) $\{w \mid w \text{ ist nicht leer und beginnt und endet mit dem gleichen Zeichen}\}$, (3 P.)
- (b) $\{w \mid w \text{ ist, in Binärdarstellung, kleiner als } 5\}$, wobei leitende 0-en erlaubt sind, (3 P.)
- (c) $\{w \mid w \text{ enthält eine durch } 4 \text{ teilbare Anzahl von } 0\text{en}\}$. (2 P.)

Sie können die Automaten auch in Form von Diagrammen angeben.

2. Seien $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ und $A' = \langle Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' \rangle$ Automaten. Geben Sie einen Automaten $B = \langle \tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{q}_0, \tilde{F} \rangle$ an, der ein Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann akzeptiert, wenn A das Wort w akzeptiert und A' das Wort w ablehnt. (4 P.)

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die folgende Sprache nicht regulär ist:

$$\{0^n 1^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(4 P.)

19

Aufgabe 5.

1. Bestehe Σ aus den folgenden Symbolen:

$$f () , 0 1$$

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die alle korrekten Funktionsaufrufe an f in Σ^* generiert, wenn f als zweistellige Funktion von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach \mathbb{N} aufgefasst wird, und die Argumente in Binärdarstellung angegeben werden. Beispielsweise wäre $f(10, f(110, 1111))$ ein korrekter Funktionsaufruf, nicht aber $f(10, f(110))$. Die Binärzahlen sollen ohne leitende 0 angegeben werden, d.h. 0011011 ist nicht erlaubt.

(3 P.)

2. Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Für ein Wort $w = x_0x_1 \dots x_n$ aus Σ^* sei w' das folgende Wort, ebenfalls aus Σ^* :

$$w' = (1 - x_0)(1 - x_1) \dots (1 - x_n).$$

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$\{ww' \mid w \in \Sigma^*\}$$

nicht kontextfrei ist.

(5 P.)

Aufgabe 6. Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Geben Sie explizit eine Turing-Maschine an, die die folgende Sprache über Σ entscheidet:

$$\{ww' \mid w \in \Sigma^*\}.$$

Zur Definition von w' , vgl. Aufgabe 5.2. Bitte kommentieren und beschreiben Sie die intendierte Funktionsweise der Maschine.

(5 P.)

Aufgabe 7.

1. Zeigen Sie unter der Annahme, dass $P \neq NP$ gilt, dass es ein Problem in NP gibt, das nicht NP -vollständig ist. (4 P.)
2. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$k\text{-COLOR} = \{G \mid G \text{ ist ein (ungerichteter) Graph, der mit } k \text{ Farben eingefärbt werden kann.}\}$$

Das heisst, $G = (V, E) \in k\text{-COLOR}$ genau dann, wenn es eine Funktion $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$ gibt, so dass für alle Knoten $x, y \in V$ mit $\{x, y\} \in E$ gilt: $f(x) \neq f(y)$. Eine solche Funktion heisst Färbung von G . Zeigen Sie:

- (a) $2\text{-COLOR} \in P$, (3 P.)
 - (b) $k\text{-COLOR}$ ist NP -vollständig, falls $k \geq 3$ ist. Hierfür kann man per vollständiger Induktion argumentieren, unter Verwendung der Tatsache, dass 3-COLOR NP -vollständig ist, wie in der Klausurvorbereitung gezeigt wurde. (6 P.)
3. Zeigen Sie, dass die Menge der Gödel-Nummern von Turing-Maschinen T , die eine partielle, surjektive Funktion von \mathbb{N} nach \mathbb{N} berechnen, nicht entscheidbar ist. (6 P.)

Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass die Menge aller erfüllbaren aussagenlogischen Formeln der Gestalt

$$\bigwedge_{i < n} (\varphi_i \rightarrow \varphi'_i),$$

wobei alle φ_i und φ'_i Literale (d.h., Aussagenvariablen oder Negationen von Aussagenvariablen) sind, in P ist. (6 P.)