

Kapitel 5

Unvollständigkeit und Widerspruchsfreiheit - Die Gödelschen Sätze

In diesem letzten Kapitel untersuchen wir grundlegende Eigenschaften des Herleitungs- oder Beweisbegriffs in arithmetischen Theorien wie *ROB* und der gewöhnlichen Zahlentheorie *Z*. Diese beweistheoretischen Untersuchungen konzentrieren sich auf die folgenden beiden Fragen:

1. Vollständigkeit: Unter welchen Bedingungen kann eine arithmetische Theorie *T* vollständig sein? Wann gilt für jede geschlossene Formel *A* der Sprache von *T*

entweder $T \vdash A$ oder $T \vdash \neg A$?

2. "Innerer" Beweis der Widerspruchsfreiheit: Unter welchen Bedingungen ist in einer arithmetischen Theorie *T* eine Formel Con_T herleitbar, die ausdrückt, dass *T* widerspruchsfrei ist?

Die Antwort ist in beiden Fällen negativ: Unter üblichen Bedingungen ist eine arithmetische Theorie unvollständig, und in ihr gibt es auch keinen Beweis ihrer eigenen Widerspruchsfreiheit. Nachdem sich in 4.3 die beträchtliche Leistungsfähigkeit bereits des Systems *ROB* gezeigt hat, stoßen wir hier an die Grenzen des Beweisbegriffs. Eine analoge Situation hatten wir schon am Anfang der Vorlesung: Nachdem wir in 1.2 und 1.3 die große Tragweite des Berechenbarkeitsbegriffs untersucht hatten, stellten wir in 2.1 seine Grenzen fest. Analog sind auch die Methoden: Während wir in 2.1 die Register-Maschinen und insbesondere den Begriff der Rechnung auf einer Registermaschine arithmetisiert haben, müssen wir hier die Sprache und insbesondere den Herlei-

tungsbegriff in mathematischen Theorien arithmetisieren. Wir entwickeln so eine Arithmetik der Codes von Termen, Formeln und Herleitungen.

5.1 Arithmetisierung mathematischer Theorien

Eine übliche mathematische Theorie kann man als einen Algorithmus auffassen, der hintereinander alle Herleitungen in der Theorie ausdrückt oder herstellt und damit auch alle Theoreme (herleitbaren Formeln) der Theorie aufzählt. Die Menge der Theoreme ist dann im inhaltlichen Sinn aufzählbar. Diese Aufzählung läßt sich nicht ohne weiteres herstellen, wenn die Sprache der Theorie zu viele Grundzeichen, z. B. überabzählbar viele Konstanten, enthält oder wenn einer Formel nicht anzusehen ist, ob sie ein (nicht-logisches) Axiom der Theorie ist oder nicht.

Wir beschränken uns deshalb auf Sprachen L mit **höchstens abzählbar unendlich vielen** nicht-logischen Grundzeichen. Diese Grundzeichen sollen von vornherein in einer festen effektiven Aufzählung ($z_n | 1 \leq n \leq n_0$) bzw. ($z_n | 1 \leq n$) gegeben sein. Zusätzlich sollen die Mengen $\{n | z_n \text{ ist Funktionszeichen}\}$ und $\{n | z_n \text{ ist Prädikatszeichen}\}$ und ebenso die Abbildung

$$n \longmapsto \text{Stellenzahl von } z_n$$

alle primitiv-rekursiv sein. Wir führen hier auch nur den Fall aus, in dem die Stellenzahl aller z_n beschränkt ist, in dem es also eine Zahl N gibt, so dass für alle n die Stellenzahl von z_n kleiner oder gleich N ist. Diese Einschränkung ist nicht wesentlich (vgl. Aufgabe 2 und 3).

Wir verwenden die Terminologie aus 4.3.1 für beliebige abzählbare Sprachen L . Allerdings betrachten wir von den logischen Partikeln nur $\perp, \rightarrow, \forall, =$ als Grundzeichen. \wedge, \vee, \exists seien wie üblich durch sie definiert. $\neg A$ ist hier Abkürzung für $A \rightarrow \perp$. Ferner verwenden wir eine klammerfreie Schreibweise (polnische Notation), bei der wir Funktions- und Prädikatszeichen stets vor ihre Argumentterme und (im Prinzip) $\rightarrow AB$ statt $(A \rightarrow B)$ schreiben.

5.1.1 Definition

Jedem Grundzeichen z von L und jedem Nennzeichen sei wie folgt eine **Gödel-Nummer** $\#z$ zugeordnet:

den Nennzeichen	$*_1, *_2, \dots, *_n, \dots$
die Zahlen	$5, 9, \dots, 4n+1, \dots$
den freien Variablen	$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$
die Zahlen	$6, 10, \dots, 4n+2, \dots$
den gebundenen Variablen	$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$
die Zahlen	$7, 11, \dots, 4n+3, \dots$
den logischen Partikeln	$\perp, \rightarrow, \forall, =$
die Zahlen	$1, 2, 3, 4$ und
den nicht-logischen Zeichen	$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$
die Zahlen	$8, 12, \dots, 4n+4, \dots$

FZ, PZ und st seien primitiv-rekursiv Prädikate bzw. Funktionen mit:

$$\begin{aligned} FZ(4n+4) &\iff z_n \text{ ist Funktionszeichen,} \\ PZ(4n+4) &\iff z_n \text{ ist Prädikatszeichen, } PZ(4), \\ st(4n+4) &= \text{Stellenzahl von } z_n, \text{ } st(4) = 2. \end{aligned}$$

Jeder Nennform $F \equiv u_0 \dots u_{n-1}$ wird die Zahl

$$\ulcorner F \urcorner = \langle \#u_0, \dots, \#u_{n-1} \rangle$$

als **Gödel-Nummer** $\ulcorner F \urcorner$ zugeordnet.

Bemerkung. Für jedes Grundzeichen z ist $\ulcorner z \urcorner = \langle \#z \rangle = 2^{\#z}$. Ein Grundzeichen erhält also zwei verschiedene Gödel-Nummern, je nachdem ob es als Grundzeichen oder als Nennform der Länge 1 aufgefaßt wird. - Die Abbildung $\#$ ist eine Bijektion von der Menge aller Grundzeichen auf $\mathbb{N} - \{0\}$ genau dann, wenn L unendlich viele nicht-logische Grundzeichen enthält. Sonst ist $\#$ immer noch injektiv, aber fast alle Vielfachen der 4 - einschließlich der 0 - liegen dann nicht im Bild von $\#$.

5.1.2 Lemma

Aus $\ulcorner F \urcorner = \ulcorner G \urcorner$ folgt $F \equiv G$: Verschiedene Nennformen haben verschiedene Gödel-Nummern, und aus der Gödel-Nummer $\ulcorner F \urcorner$ läßt sich die Nennform F konstruktiv wiedergewinnen.

Beweis. Ist $F \equiv u_0 \dots u_{n-1}$ und $G \equiv v_0 \dots v_{m-1}$ und $\ulcorner F \urcorner = \ulcorner G \urcorner$, so ist $n = lh(\ulcorner F \urcorner) = lh(\ulcorner G \urcorner) = m$, weil $\#u_{n-1} \neq 0$ und $\#v_{m-1} \neq 0$ ist. Dann

ist für $i < n$ auch $\#u_i = (\ulcorner F \urcorner)_i = (\ulcorner G \urcorner)_i = \#v_i$, also $u_i \equiv v_i$, weil $\#$ injektiv gewählt ist. Also ist $F \equiv G$. Schließlich läßt sich u_i zu $\#u_i$ effektiv auffinden. Denn dies ist für die nicht-logischen Grundzeichen vorausgesetzt und für die übrigen Grundzeichen nach Wahl von $\#$ trivial.

Natürlich sind uns die meisten Nennformen und ihre Gödel-Nummern gleichgültig. Unser Interesse haben hauptsächlich die folgenden Mengen von Gödel-Nummern:

$$\begin{aligned} \{\ulcorner t \urcorner & \mid t \text{ ist Term aus } L\}, \\ \{\ulcorner A \urcorner & \mid A \text{ ist Formel aus } L\}, \\ \{\ulcorner A \urcorner & \mid A \text{ ist nicht-logisches Axiom von } T\}, \\ \{\ulcorner A \urcorner & \mid T \vdash A\}. \end{aligned}$$

Unser Ziel ist, die beiden ersten Mengen als primitiv-rekursiv zu erkennen und, sofern die dritte Menge rekursiv ist, die letzte Menge wenigstens als rekursiv aufzählbar nachzuweisen. Wir verwenden folgenden Hilbert-artigen Herleitungsbegriff, der sich zur Arithmetisierung einigermaßen eignet.

5.1.3 Definition der Herleitungen in einer Theorie T

Logische Axiome sind die Formeln der Schemata

$$\begin{aligned} Ax1. & A \rightarrow (B \rightarrow A) \\ Ax2. & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\ Ax3. & \neg\neg A \rightarrow A \\ Ax4. & \forall x F(x) \rightarrow F(t) \\ Ax5. & t = t \\ Ax6. & s = t \rightarrow F(s) \rightarrow F(t) \end{aligned}$$

Grundschlussregeln sind die Regeln des **modus ponens** (*mp*) und der All-Einführung (**\forall -Introduction** $\forall I$):

$$\begin{aligned} (mp) & A \rightarrow B, A \vdash B \\ (\forall I) & B \rightarrow F(a) \vdash B \rightarrow \forall x F(x) \\ & \text{falls } a \text{ nicht in der Konklusion auftritt} \end{aligned}$$

Eine **Herleitung** H in einer Theorie $T = (L, Ax(T))$ ist ein endlicher Baum, dessen Knoten mit Formeln von L wie folgt besetzt sind:

1. An den Spitzen von H stehen logische Axiome der Sprache L und nicht-logische Axiome von T (Sätze aus $Ax(T)$);
2. An jedem anderen Knoten steht die Konklusion eines Grundschlusses, dessen Prämissen unmittelbar darüber stehen;

3. H hat nur einen untersten Knoten.

Eine Formel A heißt **in T herleitbar** oder **ein Theorem von T** , $T \vdash A$, wenn es eine Herleitung in T gibt, auf deren unterstem Knoten A steht.

Dieser Herleitungsbegriff ist korrekt und vollständig relativ zur klassischen Semantik:

$$T \vdash A \iff A \text{ gilt in (jedem Modell von) } T.$$

Auf der Basis dieses Herleitungsbegriffs führen wir für eine fest gegebene Sprache L und Theorien $T = (L, Ax(T))$ die oben angegebenen Mengen formal als zahlentheoretische Prädikate ein.

5.1.4 Definition

Die einstelligen Prädikate $Term$, $Formel$, Ax_T und Thm_T seien definiert durch

$$\begin{aligned} Term(x) &\iff \text{ es gibt einen Term } t \text{ aus } L \text{ mit } x = \ulcorner t \urcorner; \\ Formel(x) &\iff \text{ es gibt eine Formel } A \text{ aus } L \text{ mit } x = \ulcorner A \urcorner; \\ Ax_T(x) &\iff \text{ es gibt eine Formel } A \text{ aus } Ax(T) \text{ mit } x = \ulcorner A \urcorner; \\ Thm_T(x) &\iff \text{ es gibt eine Formel } A \text{ aus } L \text{ mit } T \vdash A \text{ und } x = \ulcorner A \urcorner. \end{aligned}$$

T heißt (rekursiv) **axiomatisiert**, wenn Ax_T rekursiv ist. T heißt (rekursiv) **entscheidbar**, wenn Thm_T rekursiv ist.

Legt man die Church'sche These zu Grunde, so ist eine Theorie T genau dann rekursiv entscheidbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der von einer gegebenen Formel entscheidet, ob sie in T herleitbar ist oder nicht.

Immer unter der Voraussetzung, dass die hier betrachteten Sprachen L gemäß Definition 5.1.1 konstruktiv arithmetisiert sind, sind unsere Ziele für Theorien T mit Sprache L :

1. Die Prädikate $Term$ und $Formel$ sind primitiv-rekursiv.
2. Ist T axiomatisiert, so ist Thm_T rekursiv aufzählbar.
3. Jede widerspruchsfreie Erweiterung von ROB ist unentscheidbar.
4. Jede axiomatisierte Erweiterung von ROB ist unvollständig.
5. In üblichen widerspruchsfreien zahlentheoretischen Theorien T ist das Prädikat Thm_T zwar definierbar, aber die Formel $\neg Thm_T(\ulcorner 1 = 0 \urcorner)$ ist in T nicht herleitbar.

Wie bei der Arithmetisierung von Register-Maschinen müssen wir auch hier eine Reihe primitiv-rekursiver Prädikate und Funktionen einführen und einfache Zusammenhänge nachprüfen. Wir verwenden häufig Begriffe und Ergebnisse aus 1.3. Insbesondere definieren wir Prädikate und Funktionen öfters durch Wertverlaufsrekursion, die nach Satz 1.3.29 eine primitiv-rekursive Operation ist.

5.1.5 Lemma

Für Nennformen F, G ist stets

$$\ulcorner FG \urcorner = \ulcorner F \urcorner * \ulcorner G \urcorner.$$

Sind F, G nicht leer, so ist $\ulcorner F \urcorner, \ulcorner G \urcorner < \ulcorner FG \urcorner$.

Dies ergibt sich unmittelbar aus 1.3.24, wobei $*$ die primitiv-rekursive Funktion aus Definition 1.3.23 ist.

5.1.6 Definition

sub sei die zweistellige Funktion mit

$$\begin{aligned} \text{sub}(x, y) &= x \text{ für } x = 0, 1 \\ \text{sub}(x * \langle u \rangle, y) &= \begin{cases} \text{sub}(x, y) * \langle u \rangle, & \text{falls } u \neq 5, u > 0 \\ \text{sub}(x, y) * y, & \text{falls } u = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

5.1.7 Lemma

sub ist primitiv-rekursiv und arithmetisiert die Substitution für $*_1$, d. h. es ist stets

$$(1) \quad \text{sub}(\ulcorner F \urcorner, \ulcorner G \urcorner) = \ulcorner F(G) \urcorner.$$

Beweis. Jede Zahl $x > 1$ ist eindeutig eine Zahl

$$x = \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle = \langle x_0, \dots, x_{n-2} \rangle * \langle x_{n-1} \rangle$$

mit $n = lh(x) > 0, x_{n-1} > 0$ und

$$\langle x_0, \dots, x_{n-2} \rangle = x(0/n - 1) < x.$$

Also ist *sub* durch Wertverlaufsrekursion und Fallunterscheidung mit den Funktionen aus Definition 1.3.23 definiert und ist deshalb nach Satz 1.3.29

primitiv-rekursiv.

Wir beweisen (1) durch Induktion nach der Länge von F . Ist F leer, so ist $F(G)$ leer, und (1) gilt wegen $sub(1, y) = 1$. Ist $F \equiv F_1z$ und ist z nicht $*_1$, so ist $\#z \neq 5$ und > 0 , also nach Induktionsvoraussetzung

$$sub(\ulcorner F \urcorner, \ulcorner G \urcorner) = sub(\ulcorner F_1 \urcorner, \ulcorner G \urcorner) * \ulcorner z \urcorner = \ulcorner F_1(G) \urcorner * \ulcorner z \urcorner = \ulcorner F(G) \urcorner.$$

Ist $z \equiv *_1$, so ist $\#z = 5$ und nach Induktionsvoraussetzung

$$sub(\ulcorner F \urcorner, \ulcorner G \urcorner) = sub(\ulcorner F_1 \urcorner, \ulcorner G \urcorner) * \ulcorner G \urcorner = \ulcorner F_1(G) \urcorner * \ulcorner G \urcorner = \ulcorner F(G) \urcorner.$$

Damit ist (1) bewiesen.

Aufgabe 1.

- a) Man definiere eine $(n+1)$ -stellige primitiv-rekursive Funktion sub_n , für die gilt

$$sub_n(\ulcorner F \urcorner, \ulcorner G_1 \urcorner, \dots, \ulcorner G_n \urcorner) = \ulcorner F(G_1, \dots, G_n) \urcorner.$$

- b) Man definiere eine einstellige primitiv-rekursive Funktion $*$ mit folgender Eigenschaft: Ist $F \equiv G_1 \dots G_k$, so ist

$$*(\langle \ulcorner G_1 \urcorner, \dots, \ulcorner G_k \urcorner \rangle) = \ulcorner F \urcorner.$$

Man zeige: Für $x = \langle \ulcorner G_1 \urcorner, \dots, \ulcorner G_k \urcorner \rangle$ ist $*(x) < x$, und es gibt eine primitiv-rekursive Funktion f , so dass $x < f(*(x))$ ist, falls alle G_i nicht leer sind.

5.1.8 Definition

in sei das zweistellige Prädikat mit

$$x \text{ in } y \iff \exists i < lh(y) \ x = (y)_i$$

5.1.9 Lemma

in ist primitiv-rekursiv, und $x \text{ in } \ulcorner F \urcorner$ ist äquivalent damit, dass $x = \#z$ für ein Grundzeichen z ist, das in F auftritt.

Beweis. in ist primitiv-rekursiv nach Lemma 1.3.12, 15 und 22. Ist $F \equiv u_0 \dots u_{n-1}$, so ist $\ulcorner F \urcorner = \langle \#u_0, \dots, \#u_{n-1} \rangle$. Dann ist $lh(\ulcorner F \urcorner) = n$, und für $i < n$ ist $(\ulcorner F \urcorner)_i = \#u_i$ nach Satz 1.3.18.

5.1.10 Definition

$$\begin{aligned} NZ(x) &\iff \exists i < x(x = 4(i + 1) + 1); \\ FV(x) &\iff \exists i < x(x = 4(i + 1) + 2); \\ BV(x) &\iff \exists i < x(x = 4(i + 1) + 3); \end{aligned}$$

5.1.11 Lemma

Die Prädikate NZ, FV, BV sind primitiv-rekursiv, und NZ, FV bzw. BV trifft genau auf die Gödel-Nummern $\#z$ der Nennzeichen, der freien Variablen bzw. der gebundenen Variablen zu.

Denn nach Lemma 1.3.12 sind diese Prädikate primitiv-rekursiv, und nach Definition 5.1.1 gilt z. B. $NZ(x)$ genau dann, wenn $x = \#*_{i+1}$ für ein $i \geq 0$ ist.

5.1.12 Lemma

$Term(x)$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} &(FV((x)_0) \wedge x = \langle (x)_0 \rangle) \vee [FZ((x)_0) \wedge \\ &((st((x)_0) = 0 \wedge x = \langle (x)_0 \rangle) \\ &\vee (st((x)_0) = 1 \wedge \exists y_1 < x(Term(y_1) \wedge x = \langle (x)_0 \rangle * y_1)) \\ (1) &\vee \dots \\ &\vee (st((x)_0) = N \wedge \exists y_1 < x \dots \exists y_N < x(Term(y_1) \wedge \dots \wedge Term(y_N) \\ &\wedge x = \langle (x)_0 \rangle * y_1 * \dots * y_N))]. \end{aligned}$$

Das Prädikat $Term$ ist primitiv-rekursiv.

Beweis. $Term(x)$ bedeutet: es gibt einen Term t mit $x = \overline{t}$. Dann ist t eine freie Variable a , also $x = \overline{a} = \langle \#a \rangle$, und es gilt $FV(\#a)$ nach Lemma 5.1.11, also $FV((x)_0)$ und $x = \langle (x)_0 \rangle$; oder t ist $ft_1 \dots t_n$ mit einem n -stelligen Funktionszeichen f ($0 \leq n \leq N$) und kürzeren Termen t_1, \dots, t_n , also $(x)_0 = \#f$ und $st(\#f) = n$ und $Term(\overline{t_i})$ für $1 \leq i \leq n$, und somit $FZ((x)_0) \wedge st((x)_0) = n$ und nach Lemma 5.1.5

$\exists y_1 < x \dots \exists y_n < x(Term(y_1) \wedge \dots \wedge Term(y_n) \wedge x = \langle (x)_0 \rangle * y_1 * \dots * y_n)$, was insgesamt gerade die $(n + 1)$ -te Zeile von (1) ist. Da wir voraussetzen, dass die Stellenzahl von $f \leq N$ ist, hat der wesentliche Teil der Formel (1) auch nur $N + 1$ Disjunktionsglieder.

In (1) gehen nur primitiv-rekursive Funktionen und Prädikate und Ausdrücke $Term(y)$ mit $y < x$ ein, und diese werden nur durch primitiv-rekursive Operationen verknüpft (vgl. 1.3). Also definiert (1) das $Term$ -Prädikat durch

Wertverlaufsrekursion, so dass $Term$ nach Satz 1.3.29 selbst ein primitiv-rekursives Prädikat ist.

Aufgabe 2. Man zeige unter Verwendung von Aufgabe 1 b):

- a) $Term(x) \iff (FV((x)_0) \wedge x = \langle (x)_0 \rangle) \vee (FZ((x)_0) \wedge \exists y lh(y) = st((x)_0) \wedge \forall i < st((x)_0) (Term((y)_i) \wedge x = \langle (x)_0 \rangle * *y))$
- b) Der Quantor $\exists y$ läßt sich primitiv-rekursiv in x beschränken; die Formel a) ergibt dadurch eine primitiv-rekursive Definition des $Term$ -Prädikats, die von der Beschränkung der Stellenzahl der Funktionszeichen auf Zahlen $\leq N$ unabhängig ist.

5.1.13 Definition

Das einstellige Prädikat $Primf$ sei definiert durch

$$\begin{aligned} Primf(x) \iff & x = 2 \vee [PZ((x)_0) \wedge ((st((x)_0) = 0 \wedge x = \langle (x)_0 \rangle) \\ \vee & \dots \\ \vee & (st((x)_0) = N \wedge \exists y_1 < x \dots \exists y_N < x (Term(y_1) \wedge \dots \wedge Term(y_N) \\ & \wedge x = \langle (x)_0 \rangle * y_1 * \dots * y_N))] \end{aligned}$$

5.1.14 Lemma

$Primf(x) \iff$ es gibt eine Primformel P aus L mit $x = \lceil P \rceil$.

$Primf$ ist ein primitiv-rekursives Prädikat.

Beweis. Die Äquivalenz sieht man genau so ein wie im Beweis von Lemma 5.1.12. Da PZ auf $4 = (\# =)$ zutrifft und $st(\# =) = 2$ ist, sind auch die Gödel-Nummern von Gleichungen durch $Primf$ erfaßt. $Primf$ ist nach 1.3 und Lemma 5.1.12 explizit aus primitiv-rekursiven Bestandteilen definiert und damit (ohne Rückgriff auf Satz 1.3.29) primitiv-rekursiv.

Aufgabe 3. Man definiere $Primf$ analog zu $Term$ in Aufgabe 2 a), unabhängig von der Beschränkung der Stellenzahl.

5.1.15 Definition

Die Funktionen imp, neg und all seien definiert durch

$$\begin{aligned} imp(y, z) &= 4 * y * z \\ neg(y) &= imp(y, 2) \\ all(y, z) &= \langle 3, y \rangle * sub(z, \langle y \rangle) \end{aligned}$$

5.1.16 Lemma

imp, neg und all sind primitiv-rekursiv, und für Nennformen F, G und gebundene Variablen y gilt:

$$\begin{aligned} imp(\ulcorner F \urcorner, \ulcorner G \urcorner) &= \ulcorner (F \rightarrow G) \urcorner; \\ neg(\ulcorner F \urcorner) &= \ulcorner \neg F \urcorner; \\ all(\#y, \ulcorner F \urcorner) &= \ulcorner \forall y F(y) \urcorner. \end{aligned}$$

Beweis. Die drei Funktionen sind nach 1.3 und Lemma 5.1.7 primitiv-rekursiv. Es ist $\ulcorner \perp \urcorner = \langle \# \perp \rangle = 2^1 = 2$, $\ulcorner \neg \urcorner = 2^2 = 4$, $\ulcorner y \urcorner = \langle \#y \rangle$ und $\ulcorner \forall y \urcorner = \langle 3, \#y \rangle$, so dass mit Lemma 5.1.5 und 5.1.7 die behaupteten Gleichungen folgen. Dabei steht $(F \rightarrow G)$ wie üblich als Abkürzung für $\rightarrow FG$.

5.1.17 Lemma

$Formel(x)$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} &Primf(x) \\ (2) \quad &\forall \exists y < x \exists z < x (Formel(y) \wedge Formel(z) \wedge x = imp(y, z)) \\ &\vee \exists y < x \exists z < x (BV(y) \wedge Formel(sub(z, \langle 6 \rangle)) \wedge \neg y \text{ in } z \wedge x = all(y, z)). \end{aligned}$$

Das Prädikat $Formel$ ist primitiv-rekursiv.

Beweis. $Formel(x)$ bedeutet: es gibt eine Formel A mit $x = \ulcorner A \urcorner$. Dann ist A eine Primformel, und es gilt $Primf(x)$ nach Lemma 5.1.14; oder A ist $(B \rightarrow C)$, also $x = imp(\ulcorner B \urcorner, \ulcorner C \urcorner)$ für geeignete $\ulcorner B \urcorner, \ulcorner C \urcorner < x$, auf die $Formel$ zutrifft; oder A ist $\forall \bar{y} F(\bar{y})$, also - stets nach Lemma 5.1.16 - es ist $x = all(\# \bar{y}, \ulcorner F \urcorner)$ für geeignete $y = \# \bar{y}$ und $\ulcorner F \urcorner$, so dass $F(a_1)$ eine Formel ist, d. h. $Formel$ trifft zu auf

$$\ulcorner F(a_1) \urcorner = sub(\ulcorner F \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner) = sub(\ulcorner F \urcorner, \langle 6 \rangle).$$

Durch (2) wird das Prädikat $Formel$ primitiv-rekursiv charakterisiert. Denn im letzten Disjunktionsglied ist nicht nur $z < x$, sondern auch $sub(z, \langle 6 \rangle) < x$, weil

$$x = all(y, z) = \langle 3, y \rangle * sub(z, \langle y \rangle) > sub(z, \langle y \rangle) > sub(z, \langle 6 \rangle)$$

ist, was aus $BV(y) \rightarrow y > 6$ und der strengen Monotonie von sub und $\langle \ \rangle$ folgt.

Damit sind die grundlegenden Begriffe einer abzählbaren Sprache der 1. Stufe (mit nicht-logischen Grundzeichen beschränkter Stellenzahl) als primitiv-rekursiv nachgewiesen. Wir kommen zur Arithmetisierung des Herleitungsbegriffs.

Das Prädikat Ax_T ist jedenfalls primitiv-rekursiv in Theorien T mit nur endlich vielen Axiomen, wie etwa ROB . Dies ändert sich auch nicht nach Hinzunahme von Axiomschemata wie dem Schema der vollständigen Induktion, weil die Funktion sub primitiv-rekursiv und streng monoton ist.

5.1.18 Definition

Die Prädikate $Ax1$ bis $Ax6$ und $LogAx$ seien definiert durch

$$\begin{aligned}
Ax1(x) &: \iff \exists u, v < x (Formel(u) \wedge Formel(v) \wedge x = imp(u, imp(v, u))) \\
Ax2(x) &: \iff \exists u, v, w < x (Formel(u) \wedge Formel(v) \wedge Formel(w) \wedge x = \\
&\quad imp(imp(u, imp(v, w)), imp(imp(u, v), imp(u, w)))) \\
Ax3(x) &: \iff \exists u < x (Formel(u) \wedge x = imp(neg(neg(u)), u)) \\
Ax4(x) &: \iff \exists u, y, z < x (Formel(sub(u, \langle 6 \rangle)) \wedge BV(y) \wedge Term(z) \wedge \neg y \text{ in } u \\
&\quad \wedge x = imp(all(y, u), sub(u, z))) \\
Ax5(x) &: \iff \exists y < x (Term(y) \wedge x = \langle 4 \rangle * y * y) \\
Ax6(x) &: \iff \exists u, y, z < x (Formel(sub(u, \langle 6 \rangle)) \wedge Term(y) \wedge Term(z) \\
&\quad \wedge x = imp(\langle 4 \rangle * y * z, imp(sub(u, y), sub(u, z))))
\end{aligned}$$

$$LogAx(x) : \iff Ax1(x) \vee Ax2(x) \vee Ax3(x) \vee Ax4(x) \vee Ax5(x) \vee Ax6(x)$$

5.1.19 Lemma

$LogAx(x) \iff$ es gibt ein logisches Axiom A aus L mit $x = \ulcorner A \urcorner$.

$LogAx$ ist ein primitiv-rekursives Prädikat.

Beweis. $Axi(x) \iff x = \ulcorner A \urcorner$ für ein Axiom A des i -ten Axiomschemas. Wir zeigen dies für $i = 4$. $Ax4(x)$ bedeutet, dass es eine Formel $F(a_1)$, eine gebundene Variable \bar{y} , die in F nicht auftritt, und einen Term t gibt (mit $\ulcorner F \urcorner, \# \bar{y}, \ulcorner t \urcorner < x$), so dass $x = \ulcorner \forall \bar{y} F(\bar{y}) \rightarrow F(t) \urcorner$ ist; genau dann ist $x = \ulcorner A \urcorner$ für ein Axiom A , das unter das Schema $Ax4$ fällt. Die anderen Fälle folgen ähnlich.

Herleitungen in T arithmetisieren wir unter Beachtung ihrer Baumstruktur. Eine Herleitung H in T gemäß 5.1.3 besteht danach

- nur aus einem Axiom A von T bzw. einem logischen Axiom A - wir schreiben $H = (A)$,
- oder aus zwei Herleitungen H' und H'' und einer Formel B , die sich aus den Endformeln $A \rightarrow B$ von H' und A von H'' mit einem (mp) -Schluss ergibt - statt $\frac{H' \quad H''}{B}$ schreiben wir hier $H = (B, H', H'')$,

- oder aus einer Herleitung H' und einer Formel $C \equiv B \rightarrow \forall xF(x)$, die sich aus der Endformel $B \rightarrow F(a)$ von H' mit einem $(\forall I)$ -Schluss ergibt - statt $\frac{H'}{C}$ schreiben wir hier $H = (C, H')$.

Den Code $\ulcorner H \urcorner$ einer Herleitung H in T erhält man nach dem aus 2.1 bekannten Muster: Man ersetzt in H runde Klammern durch spitze und Formeln durch ihre Codes (Gödel-Nummern).

5.1.20 Rekursive Definition der Arithmetisierung $\ulcorner \urcorner$ von Herleitungen H in T .

1. $\ulcorner A \urcorner = \langle \ulcorner A \urcorner \rangle$
2. $\ulcorner (B, H', H'') \urcorner = \langle \ulcorner B \urcorner, \ulcorner H' \urcorner, \ulcorner H'' \urcorner \rangle$
3. $\ulcorner (C, H') \urcorner = \langle \ulcorner C \urcorner, \ulcorner H' \urcorner \rangle$

Den **Code** $\ulcorner H \urcorner$ von H nennt man auch die **Gödel-Nummer** von H . Das Herleitungs- oder Beweis-Prädikat Bw_T ist gegeben durch

$$Bw_T x \iff \text{es gibt eine Herleitung } H \text{ in } T \text{ mit } x = \ulcorner H \urcorner$$

Die Bezeichnung Bw für das Herleitungs- bzw. Beweis-Prädikat wurde bereits von Gödel 1931 verwendet, allerdings mit einer anderen Definition, da Gödel Herleitungen als Formelfolgen und nicht als -bäume auffasste.

Grundschlussregeln sind spezielle Relationen zwischen Formeln. Eine Formel A folgt aus Formeln B und C mit *modus ponens* (mp) genau dann, wenn B die Formel $C \rightarrow A$ ist. Zur Arithmetisierung von (mp) genügt es also, eine 3-stellige Relation mp anzugeben mit:

$$mp(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner, \ulcorner C \urcorner) \iff B \equiv C \rightarrow A$$

Eine Formel A folgt aus einer Formel B mit der Alleinführungsregel $(\forall I)$ genau dann, wenn es Formeln C und $F(a)$ gibt, so dass $A \equiv C \rightarrow \forall xF(x)$ und $B \equiv C \rightarrow F(a)$ ist, wobei die freie Variable a in A nicht auftritt. Also leisten folgende Prädikate mp und $allI$ das Gewünschte:

5.1.21 Definition

$$\begin{aligned} mp(u, v, w) & : \iff \text{Formel}(u) \wedge \text{Formel}(w) \wedge v = imp(w, u) \\ allI(u, v) & : \iff \exists w, x, y, z < max(u, v) (\text{Formel}(w) \wedge \\ & \text{Formel}(sub(x, \langle y \rangle)) \wedge FV(y) \wedge \neg y \text{ in } u \\ & \wedge BV(z) \wedge \neg z \text{ in } x \wedge u = imp(w, all(z, x)) \\ & \wedge v = imp(w, sub(x, \langle y \rangle))) \end{aligned}$$

5.1.22 Lemma

Für das Herleitungs-Prädikat Bw_T zu einer abzählbaren Theorie $T = (L, Ax(T))$ gilt:

$$\begin{aligned} Bw_T(x) \iff & (lh(x) = 1 \wedge (Ax_T((x)_0) \vee LogAx((x)_0))) \vee \\ & \vee (lh(x) = 3 \wedge Bw_T((x)_1) \wedge Bw_T((x)_2) \wedge mp((x)_0, (x)_{10}, (x)_{20})) \\ & \vee (lh(x) = 2 \wedge Bw_T((x)_1) \wedge allI((x)_0, (x)_{10})) \end{aligned}$$

Bw_T ist primitiv-rekursiv in Ax_T .

Beweis. Gelte $Bw_T(x)$. Dann ist x Code einer Herleitung H in T . H hat eine der drei vor 5.1.20 diskutierten Gestalten. Die Endformel von H hat in jedem Fall den Code $(x)_0$. In den Fällen, in denen H auf kürzere Herleitungen H' (und H'') zurückgreift, haben diese nach 5.1.20 die Codes $(x)_1$ (und $(x)_2$), deren Endformeln entsprechend die Codes $(x)_{10}$ (und $(x)_{20}$) haben. Da die Prädikate in Definition 5.1.21 die Grundschlussregeln adäquat kodieren, folgt die rechte Seite der behaupteten Äquivalenz. Diese Schlusskette lässt sich offenbar umkehren, so dass die Äquivalenz insgesamt gilt.

Diese Äquivalenz ist aber auch eine Definition von Bw_T durch Wertverlaufsrekursion, primitiv-rekursiv in $Ax(T)$. Also ist Bw_T primitiv-rekursiv in Ax_T .

Hieraus folgt das Hauptergebnis dieses Abschnitts als Korollar.

5.1.23 Satz

$$Thm_T(x) \iff \exists y(Bw_T(y) \wedge x = (y)_0)$$

Das Herleitbarkeits- oder Theorem-Prädikat Thm_T ist rekursiv-aufzählbar, wenn T rekursiv axiomatisiert ist.

Beweis. Die behauptete Äquivalenz ist die arithmetisierte Fassung von $T \vdash A$. Ist Ax_T rekursiv, so ist nach 5.1.22 auch Bw_T rekursiv, und Thm_T ist nach den Ergebnissen von 2.2 r.a.

Zur Ergänzung dieses Ergebnisses und zur Verwendung im nächsten Paragraphen betrachten wir zusätzlich folgende Funktionen.

5.1.24 Definition

Die Funktionen gen und $allab$ sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 gen(z) &= all(\mu x < z(BV(x) \wedge \neg x \text{ in } z), \\
 &\quad \mu y < z(z = sub(y, \mu x < z(FV(x) \wedge x \text{ in } z))), \\
 &\quad \text{falls } \exists x < z(FV(x) \wedge x \text{ in } z), \\
 gen(z) &= z \text{ sonst ;} \\
 allab(z) &= gen^{lh(z)}(z), \text{ d. h. f\"ur} \\
 f(z, 0) &= z \text{ und } f(z, n+1) = gen(f(z, n)) \text{ ist} \\
 allab(z) &= f(z, lh(z)).
 \end{aligned}$$

5.1.25 Lemma

Die Funktionen gen und $allab$ sind primitiv-rekursiv, und es gilt

$$gen(\ulcorner F(a) \urcorner) = \ulcorner \forall x F(x) \urcorner$$

falls a die erste freie Variable ist, die in $F(a)$ auftritt, und x die erste gebundene Variable ist, die in $F(a)$ nicht auftritt;

$$gen(\ulcorner B \urcorner) = \ulcorner B \urcorner, \text{ falls keine freie Variable in } B \text{ auftritt;}$$

$$allab(\ulcorner B \urcorner) = \ulcorner \forall B \urcorner,$$

wobei $\forall B$ den Allabschluss von B bezeichnet, der aus der Formel B hervorgeht, indem man die freien Variablen aus B der Reihe nach durch die ersten nicht in B auftretenden gebundenen Variablen ersetzt und die entsprechenden Allquantoren davorschreibt.

Beweis. Nach 1.3 und Lemma 5.1.7 bis 5.1.16 sind die genannten Funktionen primitiv-rekursiv. Die Behauptung über gen folgt aus Lemma 5.1.16. Tritt keine freie Variable in B auf, so gilt $\neg \exists x < \ulcorner B \urcorner (FV(x) \wedge x \text{ in } \ulcorner B \urcorner)$ nach Lemma 5.1.9 und 5.1.11, und es folgt $gen(\ulcorner B \urcorner) = \ulcorner B \urcorner$. Sonst gibt es eine erste freie Variable a in B . Tritt $*_1$ in B nicht auf, so ist $B \equiv F(a)$ für eine Nennform F , in der a nicht mehr auftritt. Nach Lemma 5.1.7, 5.1.9 und 5.1.11 ist dann wegen $\#*_1 = 5 < \#a$

$$\ulcorner F \urcorner = \mu y < \ulcorner B \urcorner (\ulcorner B \urcorner = sub(y, \#a)),$$

und für die erste gebundene Variable x nicht in B gilt sicher $\#x < \ulcorner B \urcorner$. Also gilt die Behauptung über gen . $allab(\ulcorner B \urcorner)$ besteht nun aus n Anwendungen von gen auf $\ulcorner B \urcorner$, wenn B aus n Grundzeichen besteht. Für eine Formel B ist dann $allab(\ulcorner B \urcorner)$ die Gödel-Nummer des oben beschriebenen Allabschlusses

von B .

Bemerkung. Durch unsere Unterscheidung von freien und gebundenen Variablen ist die Definition von *allab* schwerfällig. Arbeitet man statt dessen nur mit einer Variablensorte, so hat man freies und gebundenes Auftreten der Variablen zu charakterisieren, was in beliebigen Nennformen gar nicht sinnvoll ist. Ferner muß man dann den Begriff der Einsetzbarkeit arithmetisieren. Insgesamt wird die Definition der Substitutionsfunktion mindestens so aufwendig wie hier die von *allab*.

Wir definieren jetzt eine Funktion, die nur für Theorien relevant ist, in denen die Ziffern als Terme auftreten.

5.1.26 Definition

$$\begin{aligned} zif(0) &= \ulcorner 0 \urcorner \\ zif(y+1) &= \ulcorner suc \urcorner * zif(y) \end{aligned}$$

5.1.27 Lemma

zif ist primitiv-rekursiv; für jede Ziffer k ist

$$zif(k) = \ulcorner k \urcorner.$$

Beweis. zif ist nach Lemma 1.3.25 primitiv-rekursiv. Es ist $zif(0) = \ulcorner 0 \urcorner$ nach Definition, und aus $zif(k) = \ulcorner k \urcorner$ folgt

$$zif(k+1) = \ulcorner suc \urcorner * zif(k) = \ulcorner suc \urcorner * \ulcorner k \urcorner = \ulcorner suc \ k \urcorner$$

nach Lemma 5.1.5. Mit Induktion folgt die Behauptung.

Warnung. Ist a eine freie Variable, so ist $zif(a) = \ulcorner a \urcorner$ selbstverständlich falsch. Denn $\ulcorner a \urcorner$ ist eine natürliche Zahl, und $zif(a)$ ist ein Term, in dem a frei auftritt. Wegen Lemma 5.1.2 ist $\ulcorner a \urcorner \neq \ulcorner k \urcorner$ für alle Ziffern k .

Bemerkung. Mit der Funktion zif hat man die ursprünglich metamathematische Abbildung

$$k \mapsto \ulcorner k \urcorner$$

für Ziffern k als primitiv-rekursiv, also als repräsentierbare Funktion in arithmetischen Theorien wie *ROB* zur Verfügung. In solchen Theorien treten die Ziffern - wie in 2.1 - auf zwei Ebenen auf: einmal unmittelbar als Terme der Theorie, zum anderen als Gödel-Nummern von Zeichenreihen und Herleitungen, insbesondere auch von Ziffern. Es liegt nahe, diese Situation unter

Verwendung der Funktion zif für Diagonalargumente zu nutzen. Wir werden das in 5.2 und 5.3 tun.

In 4.3 war eine Lücke geblieben bezüglich der Äquivalenz von Rekursivität und starke Repräsentierbarkeit. Sie war dort durch einen Appell an die Church'sche These zugedeckt worden; sie läßt sich aber im Anschluß an Satz 5.1.23 mit Lemma 5.1.27 vollständig schließen.

5.1.28 Satz

Alle stark repräsentierbaren Prädikate sind rekursiv.

Beweis. Wir können uns auf einstellige Prädikate P beschränken, und wir benutzen, dass die Theorie ROB widerspruchsfrei ist. Sei nun P durch die Nennform F stark repräsentiert. Dann folgt

$$\begin{aligned} P(k) &\iff ROB \vdash F(k) \\ &\iff Thm_{ROB}(\ulcorner F(k) \urcorner) \quad \text{nach Satz 5.1.23} \\ &\iff Thm_{ROB}(sub(\ulcorner F \urcorner, zif(k))), \end{aligned}$$

da $sub(\ulcorner F \urcorner, zif(k)) = sub(\ulcorner F \urcorner, \ulcorner k \urcorner) = \ulcorner F(k) \urcorner$ nach Lemma 5.1.7 und 5.1.27 gilt. Ebenso folgt

$$\neg P(k) \iff Thm_{ROB}(sub(\ulcorner \neg F \urcorner, zif(k))).$$

ROB ist endlich axiomatisiert. Also ist nach Satz 5.1.23 Thm_{ROB} r.a. Da sub und zif primitiv-rekursiv sind, ist sowohl P als auch $\neg P$ r.a. Nach dem Satz 2.2.5 von Post ist dann P rekursiv.

An die Definition von zif schließen wir noch einen Begriff an, der die Funktionen sub und zif verkoppelt und die Möglichkeit verdeutlicht, mit zif Diagonalargumente zu formalisieren.

5.1.29 Definition

Die Funktion $subz$ ist definiert durch

$$subz(x, y) = sub(x, y * zif(y)).$$

5.1.30 Lemma

$subz$ ist primitiv-rekursiv. Ist F eine Nennform und g ein einstelliges Funktionszeichen aus L , so ist

$$subz(\ulcorner F \urcorner, \ulcorner g \urcorner) = \ulcorner F(g \ulcorner g \urcorner) \urcorner.$$

Beweis. Es sei $\ulcorner g \urcorner = k$. Dann ist $g\ulcorner g \urcorner$ der geschlossene Term gk (und nicht etwa der Wert dieses Terms). Es ist

$$\ulcorner gk \urcorner = \ulcorner g \urcorner * \ulcorner k \urcorner = k * \ulcorner k \urcorner = k * \text{zif}(k)$$

nach Lemma 5.1.5 und 5.1.24, also

$$\begin{aligned} \text{subz}(\ulcorner F \urcorner, k) &= \text{sub}(\ulcorner F \urcorner, k * \text{zif}(k)) \\ &= \text{sub}(\ulcorner F \urcorner, \ulcorner gk \urcorner) = \ulcorner F(gk) \urcorner \end{aligned}$$

nach Lemma 5.1.7, und das ist die Behauptung.

Bemerkung. In dem Ausdruck $y * \text{zif}(y)$ tritt das Argument y unmittelbar auf zwei verschiedenen Ebenen auf, was sich augenfällig im Auftreten von $g\ulcorner g \urcorner$ im letzten Lemma äußert.

5.2 Unentscheidbarkeit und Unvollständigkeit

Eine Theorie T heißt **Erweiterung** einer Theorie T_0 , $T \succ T_0$ oder $T_0 \prec T$, wenn jedes (nicht-logische) Grundzeichen von T_0 auch Grundzeichen von T ist (und zwar von derselben Art und Stellenzahl) und jedes (nicht-logische) Axiom von T_0 in T herleitbar ist. Eine Theorie T heißt **widerspruchsfrei**, wenn für keine Formel A aus $L(T)$ gilt

$$\text{sowohl } T \vdash A \text{ als auch } T \vdash \neg A.$$

T heißt **vollständig**, wenn für jede geschlossene Formel A aus $L(T)$ gilt

$$\text{entweder } T \vdash A \text{ oder } T \vdash \neg A.$$

Vollständige Theorien sind insbesondere widerspruchsfrei.

Wir untersuchen Erweiterungen T von ROB auf ihre Entscheidbarkeit (vgl. 5.1.4) und ihre Vollständigkeit, indem wir die Ergebnisse der Abschnitte 4.3 und 5.1 auf sie anwenden. Die Sprache L von T erfülle die für die Arithmetisierung in 5.1 gemachten Voraussetzungen. In L treten jedenfalls alle Ziffern als Terme auf. Wegen $ROB \prec T$ sind alle rekursiven Funktionen und Prädikate auch in T stark repräsentierbar.

5.2.1 Definition

Eine Nennform F aus L **repräsentiert** eine Menge M **schwach in T** , wenn stets

$$k \in M \Leftrightarrow T \vdash F(k)$$

Bemerkung. Ist T widerspruchsvoll, so ist nur \mathbb{N} in T schwach repräsentierbar. Aus dem starken Repräsentierbarkeitssatz 4.3.21 folgt aber:

5.2.2 Lemma

Ist T widerspruchsfrei, so ist jede rekursive Menge in T schwach repräsentierbar.

Beweis. Ist M rekursiv, so wird M nach Satz 4.3.21 von seiner $\Sigma(\mathcal{N})$ -Definition F (in ROB) stark repräsentiert. Dann gilt

$$k \in M \Rightarrow ROB \vdash F(k) \Rightarrow T \vdash F(k), \text{ da } ROB \prec T, \text{ und}$$

$$k \notin M \Rightarrow ROB \vdash \neg F(k) \Rightarrow T \vdash \neg F(k) \Rightarrow T \not\vdash F(k),$$

da T widerspruchsfrei ist. Also repräsentiert F M schwach auch in T .

Wir suchen nach einem "globalen" Prädikat, das alle in T schwach repräsentierbaren Mengen aufzählt. Wir suchen also nach einem Prädikat P mit

$$(1) \quad P(\ulcorner F \urcorner, k) \iff T \vdash F(k).$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist } T \vdash F(k) &\iff Thm_T(\ulcorner F(k) \urcorner) \\ &\iff Thm_T(sub(\ulcorner F \urcorner, \ulcorner k \urcorner)) \\ &\iff Thm_T(sub(\ulcorner F \urcorner, zif(k))) \end{aligned}$$

Also können wir P wie folgt definieren:

5.2.3 Definition

$$P(x, y) \iff Thm_T(sub(x, zif(y))).$$

Für dieses P gilt dann offenbar (1).

5.2.4 Lemma

T sei eine widerspruchsfreie Erweiterung von ROB . Zu jeder rekursiven Menge M gibt es eine Zahl n , so dass für alle y gilt

$$y \in M \iff P(n, y).$$

Beweis. Nach Lemma 5.2.2 gibt es eine Nennform F , die M in T schwach repräsentiert, also wegen (1)

$$k \in M \iff T \vdash F(k) \iff P(\ulcorner F \urcorner, k).$$

Dann erfüllt $n = \ulcorner F \urcorner$ die Behauptung.

Aus diesem Lemma folgt mit dem Cantorschen Diagonalschluss, dass das Komplement des Theorem-Prädikats Thm_T nicht unter den $P(n, \cdot)$ sein kann, dass also Thm_T nicht entscheidbar ist.

5.2.5 Unentscheidbarkeitssatz (Church 1935).

Ist T eine widerspruchsfreie Erweiterung von ROB , so ist Thm_T nicht rekursiv, und T ist nicht entscheidbar:

ROB ist wesentlich unentscheidbar.

Beweis. Wir definieren Q durch

$$(2) \quad Q(y) \iff \neg P(y, y) \iff \neg Thm_T(sub(y, zif(y)))$$

Nach Cantor (vgl. Lemma 2.2.14) gibt es dann keine Zahl n , für die stets $Q(y) \iff P(n, y)$ wäre, weil hieraus der Widerspruch

$$P(n, n) \iff Q(n) \iff \neg P(n, n)$$

folgt. Nach Lemma 5.2.4 ist Q also nicht rekursiv. Da die Funktionen sub und zif nach Lemma 5.1.7 und 5.1.27 primitiv-rekursiv sind, sind dann nach Lemma 1.3.2 und 1.3.12 auch $\neg Thm_T$ und Thm_T nicht rekursiv. Die Theorie T ist also nicht entscheidbar.

In Kapitel 3 haben wir Theorien in Anpassung an unlösbare Wortprobleme konstruiert und dann leicht die inhaltliche Unentscheidbarkeit dieser Theorien bewiesen. Hier haben wir umgekehrt die Rekursionstheorie der Arithmetik angepasst und damit die Unentscheidbarkeit arithmetischer Theorien bewiesen. Dieses Ergebnis ist für die Frage der Lösbarkeit mathematischer Probleme offenbar von größerer Relevanz als die Unlösbarkeit von Halte- und Wortproblemen im 3. Kapitel. Im Anschluss an diesen Satz zeigt sich auch die Unmöglichkeit, die Zahlentheorie vollständig zu axiomatisieren.

5.2.6 Satz

Jede rekursiv axiomatisierte vollständige Theorie ist entscheidbar.

Beweis. Zu jeder Formel B der Sprache L der betrachteten Theorie T sei $\forall B$ der in 5.1.25 eingeführte Allabschluss von B . Es ist $T \vdash B \iff T \vdash \forall B$; also gilt für vollständige Theorien T :

$$T \not\vdash B \iff T \vdash \neg \forall B.$$

Nach Ergebnissen aus 5.1 ergibt dies

$$\neg Thm_T(x) \iff Formel(x) \rightarrow Thm_T(neg(allab(x))).$$

Formel, *neg* und *allab* sind primitiv-rekursiv, und für rekursiv axiomatisiertes T ist Thm_T nach Satz 5.1.23 r.a. Dann ist hiernach auch $\neg Thm_T$ r.a. Nach dem Satz 2.2.5 von Post ist daher Thm_T rekursiv, und T ist entscheidbar.

Aus diesen beiden Sätzen folgt unmittelbar:

5.2.7 1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz (1931, in der Fassung von Rosser 1936)

Jede rekursiv axiomatisierte Erweiterung von ROB ist unvollständig.

Denn wäre eine axiomatisierte Erweiterung T von ROB vollständig, dann wäre sie nach Satz 5.2.6 entscheidbar und widerspruchsfrei, im Widerspruch zum Unentscheidbarkeitssatz 5.2.5.

Bemerkung. Dieser Satz macht eine völlig andere Aussage als die Konsequenz aus dem Kompaktheitssatz, nach der jede Theorie, die \mathcal{N} als Modell hat, auch Nicht-Standard-Modelle hat. In diesen Nicht-Standard-Modellen gelten u. U. dieselben arithmetischen Formeln wie in \mathcal{N} , und die verschiedenen Modelle der Theorie unterscheiden sich u. U. nur in Eigenschaften wie der Mächtigkeit, die innerhalb der Theorie nicht ausdrückbar sind. Nach dem Unvollständigkeitssatz lassen sich in jeder widerspruchsfreien arithmetischen Theorie, in der der Axiombegriff entscheidbar ist, Formeln angeben, deren Gültigkeit in \mathcal{N} durch die gegebene Theorie jedenfalls nicht entschieden wird. Die Gestalt dieser Formeln wird noch im abschließenden Abschnitt zu untersuchen sein.