

**PROGRAMM ARBEITSGEMEINSCHAFT
“SPURABBILDUNGEN” DÜSSELDORF-MÜNSTER
MÄRZ 2009**

STEFFEN SAGAVE

Ziel der Arbeitsgemeinschaft ist es, etwas über die Spurabbildungen aus der algebraischen K -Theorie in die topologische Hochschild-Homologie THH und die topologische zyklische Homologie TC zu lernen. Neben der Definition dieser Theorien und der Einführung einiger dafür nötiger Grundlagen soll vor allem erklärt werden, wie man in Beispielen THH und TC berechnet und mit Hilfe der Spurabbildung Informationen über die algebraische K -Theorie gewinnt.

Was lesen? Die vermutlich umfassendste Referenz ist das Buchprojekt [DGM] von Dundas, Goodwillie und McCarthy. Einen sehr guten Überblick und Leitfaden für den im Rahmen der Arbeitsgemeinschaft zu behandelnden Stoff bietet Schlichtkrull's Übersichtsvortrag [Sch]. Rognes' Vortragsaufzeichnungen [Roga, Rogb, Rogc, Rogd] bieten jeweils einen kurzen, aber verhältnismäßig detailreichen Einstieg in einzelne Aspekte des Themas. Andere weiterreichende Referenzen sind Madsens Übersichtsartikel [Mad94] oder die Arbeit [BHM93] von Bökstedt, Hsiang und Madsen, in der TC eingeführt wurde.

Wo und wann? Die Arbeitsgemeinschaft fand am 02. März 2009 in Düsseldorf und am 12. und 13. März 2009 in Münster statt. Pro Tag gab es 4 Vorträge.

Vorträge. Die Vorträge (1), (3) und (6) sind vergleichsweise einfach und beleuchten größtenteils die algebraische Seite der Geschichte. Zentral für das Verständnis sind die Vorträge (2), (4), (7) und (8), in denen THH, TC und die Spurabbildungen eingeführt werden. In den Vorträgen (5) und (9) sollen Berechnungen vorgestellt werden. Die Themen von (10), (11) und (12) sind weitere Resultate und Anwendungen, die interessant und wichtig sind, aber nicht als Grundlage für die übrigen Vorträge dienen.

Die vorgesehene Länge für die einzelnen Vorträge ist 60 Minuten, die Darstellung sollte also eher knapp gehalten und auf die wesentlichen Ideen konzentriert sein. Als Ausnahme scheint es sinnvoll, Vorträge (2) und (5) auf 75 Minuten auszudehnen und Vortrag (6) auf 45 Minuten zu beschränken. (11) ist ein Doppelvortrag mit zwei mal 45 Minuten Länge.

(1) **Hochschild-Homologie** (Henrik Rüping am 02.03.)

Definition von Hochschild-Homologie mit dem Bar-Komplex. Beschreibung als Bimodul-Tor. Morita-Invarianz und die Spurabbildung (z. B. [Lod98, Theorem 1.2.4], oder auch [Rogb, §1.3]). Berechnung der Hochschild-Homologie von (graduieren) Polynomalgebren und von äußeren Algebren (siehe z. B. [MS93, Proposition 2.1], dieses Beispiel wird später wichtig für THH-Berechnungen). Andere Quellen sind [ML63, Wei94, CE56].

Date: 13. März 2009.

Die Arbeitsgemeinschaft wurde unterstützt durch das Graduiertenkolleg “Analytische Topologie und Metageometrie” am Mathematischen Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster und durch Mittel aus dem Leibniz-Preis von Prof. Dr. Wolfgang Lück.

- (2) **Γ -Ringe** (Christian Wegner am 02.03.)
 Γ -Räume, ihr Smash-Produkt und Γ -Ringe definieren. Assoziierte Spektren und stabile Äquivalenzen definieren und die Modellstrukturen am Rand erwähnen. Vielleicht der Bezug zu FSPs in Bökstedts Sinne? Bis hier hilft [Sch99, Lyd99]. Drei Definitionen von THH für Γ -Ringe geben: Als Bar-Konstruktion mit Hilfe des Smash-Produkts. Als Bimodul-Tor. Bökstedts Definition mit dem Homotopiekolimes. Die Äquivalenz dieser Beschreibungen skizzieren, [Shi00] folgend. Vielleicht erklären, warum THH selbst wieder ein Γ -Raum ist. Siehe auch [Bökera, DGM].
- (3) **Dennis-Spurabbildung** (Mark Ullmann am 02.03.)
 Algebraische K -Theorie von Ringen mit der Gruppenkomplettierung definieren, vielleicht kurz mit der $+$ -Konstruktion vergleichen. Die Dennis-Spurabbildung angeben. Beispiele? (Bis hier ist das etwa [Roga, §1]). Die algebraische K -Theorie von Γ -Ringen definieren, ebenfalls mit der Gruppenkomplettierung, nun aber mit dem “general linear grouplike monoid” des Γ -Rings [DGM, III.2.3.1] (oder [Sch04] für den Fall der symmetrischen Spektren). Siehe auch [Lod98, Ros94, Wei].
- (4) **Spurabbildung nach THH** (Rubén Sánchez Garcia am 02.03.)
 Die Spurabbildung $K(R) \rightarrow \mathrm{THH}(R)$ für Γ -Ringe einführen und dabei erklären, welche Komplikationen bei der Verallgemeinerung von Ringen auf Γ -Ringe auftreten und wie sie umschifft werden können. Eine gute Möglichkeit ist, [Sch04, §4] zu folgen. Vielleicht auch den Zugang in [DGM] diskutieren, der funktoriell ist, aber eine andere Definition für die K -Theorie benutzt?
- (5) **THH-Berechnungen** (Steffen Sagave am 12.03.)
 Berechnungen von $\mathrm{THH}(\mathbb{Z}/p)$ und/oder $\mathrm{THH}(\mathbb{Z})$ nach Bökstedt [Bökerb]. Es bietet sich an, die Zusammenfassung in [Rogc] als Leitfaden zu benutzen und die in [AR05] entwickelten Methoden für die Analyse der Differentiale anzuwenden, siehe auch [Aus05, §5]. Als Beispiel kann man Bökstedts Resultat über die Spurabbildung $K(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{THH}(\mathbb{Z})$ vorstellen [Rog98].
- (6) **Negative zyklische Homologie** (Ferit Deniz am 12.03.)
 Zyklische Mengen. Spurabbildung in die negative zyklische Homologie. Vielleicht etwas über Goodwillies Satz [Goo86] sagen. Quellen sind [Lod98] und [Ros94].
- (7) **Definition von TC** (Noé Bárcenas Torres am 12.03.)
 Geometrische Realisierung zyklischer Mengen. Die S^1 -Operation auf THH. Simpliciale Unterteilung und das simpliciale Modell für die Operation endlicher zyklischer Untergruppen von S^1 . Die Frobenius-Abbildung definieren. Als Anwendung der simplicialen Unterteilung die Restriktions-Abbildung definieren. Die “Restriktions-Kofaserfolge” vorstellen. Eine erste Definition von TC geben. Man kann sich z. B. an die Darstellung in [Roga, §6-7] halten. Mehr dazu ist in [BHM93, DGM, Mad94] zu finden.
- (8) **Die zyklotomische Spurabbildung** (Wolfgang Steimle am 12.03.)
 Die zyklotomische Spurabbildung $K(R) \rightarrow \mathrm{TC}(R)$ konstruieren. Äquivalente Definitionen von TC mit TR und TF geben. Den Bezug zu Witt-Vektoren erklären. In Abstimmung mit (9) Beispiele für K -Theorie Approximationen mit der Spurabbildung erwähnen. [Roga, BHM93, Mad94]
- (9) **TC-Berechnungen** (Steffen Sagave am 13.03.)
 Die Strategie für TC-Berechnungen anhand von Beispielen vorstellen, etwa an $\mathrm{TC}(\mathbb{Z}, p)$ [BM94, Tsa97]. Andere Quellen mit Beispielen für und Grundlagen zu TC-Berechnungen sind [HM03, AR02]. Notwendiges Handwerkszeug aus der äquivarianten stabilen Homotopietheorie, insbesondere Tate-Spektren, sollten erklärt werden.

- (10) **Die Spurabbildung und die Inklusion der Einheiten** (Mark Ullmann am 13.03.)
 Eine Anwendung auf die K -Theorie von Ringspektren: Homotopieklassen in den Homotopiegruppen $\pi_i(R)$, $i \geq 2$ eines strikt kommutativen Ringspektrums R geben nichttriviale Klassen in der algebraischen K -Theorie von R , wenn ihr Produkt mit der Hopfababbildung η von null verschieden ist. [BW87, Sch04].
- (11) **Goodwillies “Calculus of functors” und der Vergleich von relativer K -Theorie und relativem TC** (Tibor Macko, zwei Vorträge am 13.03.)
 Die im Titel angegebenen Sätze McCarthy / Dundas / Dundas-Goodwillie-McCarthy formulieren. Die Bedeutung dieser Resultate anhand von Beispielen erklären. Die Struktur des Beweises umreißen und die Reduktion auf einen gewissen Spezialfall erklären, den man mit Hilfe “Calculus of functors”-Technologie beweisen kann. Eine Einführung zum “Goodwillie Calculus” geben: Lineare Funktoren, die erste Ableitung und analytische Funktoren vorstellen. Literatur dazu: Der Beweis der allgemeinen Form von “relative K -Theorie ist relatives TC” ist eines der Hauptanliegen von [DGM], publizierte Spezialfälle sind [Dun97, McC97]. Die notwendigen Resultate über “Calculus of functors” finden sich in [Goo92]. Andere Instanzen von relativen Sätzen werden in [BCC⁺96] und [Goo91] diskutiert.

LITERATUR

- [AR02] Christian Ausoni and John Rognes. Algebraic K -theory of topological K -theory. *Acta Math.*, 188(1):1–39, 2002.
- [AR05] Vigeik Angeltveit and John Rognes. Hopf algebra structure on topological Hochschild homology. *Algebr. Geom. Topol.*, 5:1223–1290 (electronic), 2005.
- [Aus05] Christian Ausoni. Topological Hochschild homology of connective complex K -theory. *Amer. J. Math.*, 127(6):1261–1313, 2005.
- [BCC⁺96] Marcel Bökstedt, Gunnar Carlsson, Ralph Cohen, Thomas G. Goodwillie, Wu Chung Hsiang, and Ib Madsen. On the algebraic K -theory of simply connected spaces. *Duke Math. J.*, 84(3):541–563, 1996.
- [BHM93] Marcel Bökstedt, Wu Chung Hsiang, and Ib Madsen. The cyclotomic trace and algebraic K -theory of spaces. *Invent. Math.*, 111(3):465–539, 1993.
- [BM94] Marcel Bökstedt and Ib Madsen. Topological cyclic homology of the integers. *Astérisque*, (226):7–8, 57–143, 1994. K -theory (Strasbourg, 1992).
- [Bökera] Marcel Bökstedt. Topological Hochschild homology. Unpublished manuscript, Bielefeld, 1985 and later.
- [Bökerb] Marcel Bökstedt. The topological Hochschild homology of \mathbb{Z} and \mathbb{F}_p . Unpublished manuscript, Bielefeld, 1985 and later.
- [BW87] Marcel Bökstedt and Friedhelm Waldhausen. The map $BSG \rightarrow A(*) \rightarrow QS^0$. In *Algebraic topology and algebraic K-theory (Princeton, N.J., 1983)*, volume 113 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 418–431. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987.
- [CE56] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
- [DGM] Bjørn Ian Dundas, Thomas G. Goodwillie, and Randy McCarthy. The local structure of algebraic K -theory. book project, available at <http://www.math.ntnu.no/~dundas/PP/040609b.pdf>.
- [Dun97] Bjørn Ian Dundas. Relative K -theory and topological cyclic homology. *Acta Math.*, 179(2):223–242, 1997.
- [Goo86] Thomas G. Goodwillie. Relative algebraic K -theory and cyclic homology. *Ann. of Math. (2)*, 124(2):347–402, 1986.
- [Goo91] Thomas G. Goodwillie. The differential calculus of homotopy functors. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)*, pages 621–630, Tokyo, 1991. Math. Soc. Japan.
- [Goo92] Thomas G. Goodwillie. Calculus. II. Analytic functors. *K-Theory*, 5(4):295–332, 1991/92.

- [HM03] Lars Hesselholt and Ib Madsen. On the K -theory of local fields. *Ann. of Math. (2)*, 158(1):1–113, 2003.
- [Lod98] Jean-Louis Loday. *Cyclic homology*, volume 301 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998. Appendix E by María O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili.
- [Lyd99] Manos Lydakis. Smash products and Γ -spaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 126(2):311–328, 1999.
- [Mad94] Ib Madsen. Algebraic K -theory and traces. In *Current developments in mathematics, 1995 (Cambridge, MA)*, pages 191–321. Int. Press, Cambridge, MA, 1994.
- [McC97] Randy McCarthy. Relative algebraic K -theory and topological cyclic homology. *Acta Math.*, 179(2):197–222, 1997.
- [ML63] Saunders Mac Lane. *Homology*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 114. Academic Press Inc., Publishers, New York, 1963.
- [MS93] James E. McClure and Ross E. Staffeldt. On the topological Hochschild homology of bu . I. *Amer. J. Math.*, 115(1):1–45, 1993.
- [Roga] John Rognes. Notes on topological cyclic homology and the cyclotomic trace map. talk notes, available at <http://folk.uio.no/rognes/papers/tcnotes.dvi>.
- [Rogb] John Rognes. On trace maps. talk notes, available at http://folk.uio.no/rognes/papers/trace_maps.dvi.
- [Rogc] John Rognes. THH and TAQ. talk notes, available at <http://folk.uio.no/rognes/papers/thh-taq.dvi>.
- [Rogd] John Rognes. Topological cyclic homology of \mathbb{S} -algebras. talk notes, available at <http://folk.uio.no/rognes/papers/tc.dvi>.
- [Rog98] John Rognes. Trace maps from the algebraic K -theory of the integers (after Marcel Bökstedt). *J. Pure Appl. Algebra*, 125(1-3):277–286, 1998.
- [Ros94] Jonathan Rosenberg. *Algebraic K-theory and its applications*, volume 147 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [Sch] Christian Schlichtkrull. Algebraic K -theory and traces for structured ring spectra. slides from a talk at the Banff workshop ‘new topological contexts for Galois theory and algebraic geometry’, available at <http://folk.uib.no/csc021/Banff2008.pdf>.
- [Sch99] Stefan Schwede. Stable homotopical algebra and Γ -spaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 126(2):329–356, 1999.
- [Sch04] Christian Schlichtkrull. Units of ring spectra and their traces in algebraic K -theory. *Geom. Topol.*, 8:645–673 (electronic), 2004.
- [Shi00] Brooke Shipley. Symmetric spectra and topological Hochschild homology. *K-Theory*, 19(2):155–183, 2000.
- [Tsa97] Stavros Tsalidis. On the topological cyclic homology of the integers. *Amer. J. Math.*, 119(1):103–125, 1997.
- [Wei] Charles A. Weibel. The K -book: An introduction to algebraic K -theory. A graduate textbook in progress, available at <http://www.math.rutgers.edu/~weibel/Kbook.html>.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

STEFFEN SAGAVE, SFB 478 “GEOMETRISCHE STRUKTUREN IN DER MATHEMATIK”, WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER, HITTORFSTR. 27, 48149 MÜNSTER

E-mail address: s.sagave@uni-muenster.de