

Image restoration und simultane Kantenerkennung mit Methoden der optimalen Steuerung

Lucas Franek, Marzena Franek, Helmut Maurer und Marcus Wagner

1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist der numerischen Lösung von mehrdimensionalen Steuerungsproblemen der Gestalt

$$(P): F(x, u) = \int_{\Omega} f(s, x(s), u(s)) ds \longrightarrow \inf!; \quad (x, u) \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^{nm}); \quad (1.1)$$

$$Jx(s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1}(s) & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial s_m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial s_1}(s) & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial s_m}(s) \end{pmatrix} = B(s)u(s) \quad (\forall) s \in \Omega; \quad (1.2)$$

$$u \in U = \{ u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^{nm}) \mid u(s) \in K \quad (\forall) s \in \Omega \} \quad (1.3)$$

gewidmet. Derartige Aufgaben, auch als Dieudonné-Rashevsky-Probleme bezeichnet, entstehen bei der Untersuchung von Randwertaufgaben für nichtlineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung,⁰¹⁾ bei geometrischen Optimierungsaufgaben für konvexe Körper,⁰²⁾ in der Elastizitätstheorie (Torsionsprobleme)⁰³⁾ und in der Populationsdynamik (Aufgaben mit Einbeziehung der Altersstruktur).⁰⁴⁾ In jüngster Zeit hat sich herausgestellt, daß die Einbeziehung von Gradientenbeschränkungen auch in Aufgaben der mathematischen Bildverarbeitung sinnvoll ist.⁰⁵⁾

Obwohl Dieudonné-Rashevsky-Probleme weniger intensiv untersucht worden sind als vergleichbare Aufgaben mit partiellen DGLen zweiter Ordnung für x ,⁰⁶⁾ stehen doch seit den 90er Jahren notwendige Optimalitätsbedingungen und Dualitätssätze für konvexe Aufgaben mit linearen Zustandsgleichungen ($Jx(s) - u(s) = 0$ bzw. $Jx(s) - A(s)x(s) - B(s)u(s) = 0$) zur Verfügung.⁰⁷⁾ Numerische Lösungsverfahren wurden jedoch erstmals im Kontext der Anwendungsprobleme aus der Bildverarbeitung vorgeschlagen.⁰⁸⁾ Dabei handelt es sich um eine direkte Methode: die Aufgabe (P) wird diskretisiert und das entstehende endlichdimensionale Optimierungsproblem mit Innere-Punkte-Verfahren numerisch gelöst.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir zunächst einen Konvergenzsatz für das beschriebene Diskretisierungsverfahren beweisen (Kapitel 2). Aus den Minimallösungen der diskretisierten Steuerungsprobleme wird eine

⁰¹⁾ [DACOROGNA/MARCELLINI 97], [DACOROGNA/MARCELLINI 98] and [DACOROGNA/MARCELLINI 99].

⁰²⁾ [ANDREJEWA/KLÖTZLER 84A] and [ANDREJEWA/KLÖTZLER 84B], p. 149 f.

⁰³⁾ [FUNK 62], pp. 531 ff., [LUR'E 75], pp. 240 ff., [TING 69A], p. 531 f., [TING 69B] und [WAGNER 96], pp. 76 ff.

⁰⁴⁾ [BROKATE 85], [FEICHTINGER/TRAGLER/VELIOV 03].

⁰⁵⁾ [WAGNER 06], pp. 108 ff., [WAGNER 07].

⁰⁶⁾ Siehe etwa [TRÖLTZSCH 05].

⁰⁷⁾ Die entsprechende Theorie wurde im wesentlichen durch KLÖTZLER, PICKENHAIN und WAGNER ausgearbeitet. Siehe die Literaturhinweise in [WAGNER 07], pp. 2 und 5.

⁰⁸⁾ [BRUNE/MAURER/WAGNER 08], [FRANEK 07A], [FRANEK 07B]. Ein Vorläufer ist [DEWESS/HELBIG 95], wo ein Transportflußproblem als duale Aufgabe zu einem Dieudonné-Rashevsky-Problem (P) mit Mitteln der kombinatorischen Optimierung numerisch gelöst wurde.

Minimalfolge $\{(\tilde{x}_N, \tilde{u}_N)\}$ zulässiger Lösungen von (P) mit $|F(\tilde{x}_N, \tilde{u}_N) - m| \leq C \sigma_N$ aufgebaut, wobei m den Minimalwert von (P) und σ_N die Feinheit der Zerlegung von Ω bezeichnet. Die Minimalfolge enthält eine Teilfolge, die bezüglich x gleichmäßig und bezüglich u schwach (im Sinne des L^p , $1 < p < \infty$) konvergiert. Anschließend wenden wir das Verfahren auf eine Grundaufgabe der Bildverarbeitung an, das Problem der Kantenerkennung innerhalb verrauschter Bilddaten (“image restoration with simultaneous edge detection”) (Kapitel 3). Die Wahl dieser Aufgabe ist einerseits dadurch motiviert, daß die Auswirkung von Gradientenbeschränkungen in der mathematischen Bildverarbeitung bisher nicht untersucht worden ist und daher prinzipielles Interesse beansprucht. Um das neu vorgeschlagene Verfahren mit bereits bestehenden vergleichen zu können, ist die Anwendung auf eine gut untersuchte Grundaufgabe wünschenswert. Die Güte unserer numerischen Ergebnisse erreicht die der besten vorhandenen Variationsmethode (Kantenerkennung mit Ambrosio-Tortorelli-Funktional) und kann sie sogar übertreffen. Andererseits stellen wir mit der vorgelegten Untersuchung eine Vorarbeit für Anwendungen bereit, bei denen das image-restoration-Problem mit simultaner Kantenerkennung als Teilaufgabe in ein umfassendes Verfahren eingebettet werden muß. In diesem Fall kann die Steuerungsformulierung erhebliche Vorteile bieten.⁰⁹⁾

Zur Notation.

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei Abschluß eines beschränkten Lipschitzgebietes im strengen Sinne. Dann bezeichnet $C^k(\Omega, \mathbb{R}^r)$ den Raum der r -Vektorfunktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$, deren Komponenten stetig ($k = 0$) bzw. k -mal stetig differenzierbar sind ($k = 1, \dots, \infty$) und $L^p(\Omega, \mathbb{R}^r)$ den Raum der r -Vektorfunktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$, deren Komponenten über Ω in p -ter Potenz integrabel ($1 \leq p < \infty$) bzw. meßbar und wesentlich beschränkt sind ($p = \infty$). $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^r)$ bezeichnet den Sobolevraum aller r -Vektorfunktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$, deren Komponenten f_i kompakte Träger $\text{supp}(f_i) \subseteq \Omega$ und verallgemeinerte partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen sowie zusammen mit ihren verallgemeinerten Ableitungen zum $L^p(\Omega, \mathbb{R})$ gehören ($1 \leq p < \infty$). Schließlich verstehen wir unter $W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^r)$ den Sobolevraum aller r -Vektorfunktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$, deren Komponenten f_i Lipschitz-stetig sind und den Randwert Null annehmen.¹⁰⁾ Jx bezeichnet die Jacobimatrix der Vektorfunktion $x \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^r)$. Der Durchmesser der Menge Ω ist definiert als $\text{Diam}(\Omega) = \sup\{|x' - x''| \mid x', x'' \in \Omega\}$. $|\Omega|$ bezeichnet das m -dimensionale Lebesguesche Maß von Ω , während die Abkürzung “ $(\forall) t \in A$ ” als “für fast alle $t \in A$ ” bzw. “für alle $t \in A$ mit Ausnahme einer Lebesgueschen Nullmenge” zu lesen ist. Schließlich bezeichnet \mathfrak{o} kontextabhängig den Nullvektor des zugrundegelegten Raumes.

2. Konvergenz eines Diskretisierungsverfahrens für (P).

a) Diskretisierung der Aufgabe (P).

Wir konkretisieren die Voraussetzungen über (P) folgendermaßen: Es sei $n \geq 1$, $m = 2$ und $1 \leq p < \infty$. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Rechteck mit Seitenlängen $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geq b > 0$. Der Integrand $f(s, \xi, v): \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ sei bezüglich s meßbar und wesentlich beschränkt sowie nach allen ξ_i und v_{ij} stetig differenzierbar. $B(s)$ sei für alle $s \in \Omega$ die (n, n) -Einheitsmatrix, und $K \subset \mathbb{R}^{n \times 2}$ sei der Normkörper

$$K = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n \times 2} \mid \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 |v_{ij}|^q \leq R^q \right\} \quad (2.1)$$

⁰⁹⁾ Als Beispiel nennen wir das image-matching-Problem für Bilder, bei denen keine Korrespondenz der Grauwerte besteht, so daß ein Matching nur anhand der Kantenskizzen möglich ist. Siehe [HABER/MODERSITZKI 07].

¹⁰⁾ [EVANS/GARIEPY 92], p. 131, Theorem 5.

mit $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$. Aus den genannten Voraussetzungen ergibt sich unmittelbar die Existenz einer zulässigen Lösung (der Nulllösung). Ist (x, u) ein zulässiges Paar für (P), so folgt aus $Jx(s) \in K$ ($\forall s \in \Omega$) sogar $x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, und x besitzt deshalb in jedem Falle einen Lipschitz-stetigen Repräsentanten. Bezeichnet c_q die Äquivalenzkonstante zwischen 2- und q -Norm im \mathbb{R}^2 , so betragen die Lipschitzkonstanten der Komponenten x_i jeweils $C_1 = R/c_q$.

Sei $K = L = 2^N$. Wir zerlegen Ω in $(K \times L)$ Rechtecke $Q_{k,l}$ mit Seitenlängen $a/2^N$ und $b/2^N$ und anschließend jedes Rechteck entlang der Hauptdiagonalen in zwei Dreiecke $\Delta'_{k,l} = \Delta(s_{k-1,l-1}, s_{k,l-1}, s_{k,l})$ und $\Delta''_{k,l} = \Delta(s_{k-1,l-1}, s_{k,l}, s_{k-1,l})$. Damit ergibt sich eine reguläre Triangulation \mathcal{T}_N ¹¹⁾ mit der Feinheit $\sigma_N = \sqrt{a^2 + b^2}/2^{N+1}$, und für die Innenwinkel ϑ der Dreiecke gilt stets $\sin \vartheta \geq \sin \vartheta_0 = b/\sqrt{a^2 + b^2} > 0$.¹²⁾ Mit X_0^N bezeichnen wir den Raum aller affin-linearen Funktionen, die an die Triangulation \mathcal{T}_N angepaßt sind und auf $\partial\Omega$ verschwinden. Damit entsteht folgendes Problem:

$$(P)_N: F(x, u) = \int_{\Omega} f(s, x(s), u(s)) ds \longrightarrow \inf!; \quad (x, u) \in \left(W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap X_0^N \right) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n \times 2}); \quad (2.2)$$

$$Jx(s) = u(s) \quad (\forall s \in \Omega); \quad (2.3)$$

$$u(s) \in K = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n \times 2} \mid \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 |v_{ij}|^q \leq R^q \right\} \quad (\forall s \in \Omega). \quad (2.4)$$

Für jedes zulässige Element (x, u) von $(P)_N$ gilt:

$$\int_{Q_{k,l}} f(s, x(s), u(s)) ds = \int_{\Delta'_{k,l}} f(s, x(s), u(s)) ds + \int_{\Delta''_{k,l}} f(s, x(s), u(s)) ds \quad (2.5)$$

$$= \int_{\Delta'_{k,l}} f\left(s, x(s), \begin{pmatrix} \frac{x_1(s_{k,l-1}) - x_1(s_{k-1,l-1})}{(a/2^N)} & \frac{x_1(s_{k,l}) - x_1(s_{k,l-1})}{(b/2^N)} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x_n(s_{k,l-1}) - x_n(s_{k-1,l-1})}{(a/2^N)} & \frac{x_n(s_{k,l}) - x_n(s_{k,l-1})}{(b/2^N)} \end{pmatrix}\right) \\ + \int_{\Delta''_{k,l}} f\left(s, x(s), \begin{pmatrix} \frac{x_1(s_{k,l}) - x_1(s_{k-1,l})}{(a/2^N)} & \frac{x_1(s_{k-1,l}) - x_1(s_{k-1,l-1})}{(b/2^N)} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x_n(s_{k,l}) - x_n(s_{k-1,l})}{(a/2^N)} & \frac{x_n(s_{k-1,l}) - x_n(s_{k-1,l-1})}{(b/2^N)} \end{pmatrix}\right) ds. \quad (2.6)$$

Setzen wir $x_i(s_{k,l}) = \xi_{k,l}^{(i)}$, so erhalten wir als diskretisiertes Problem zu $(P)_N$:

$$(D)_N: \tilde{F}(\xi_{1,1}^{(1)}, \dots, \xi_{K,L}^{(n)}, v_{1,1}^{(1,1)}, \dots, v_{K,L}^{(n,4)}) = \frac{1}{2} \frac{ab}{4^N} \\ \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \left(f\left(s_{k-1,l-1}, \begin{pmatrix} \xi_{k-1,l-1}^{(1)} \\ \vdots \\ \xi_{k-1,l-1}^{(n)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{k,l}^{(1,1)} & v_{k,l}^{(1,2)} \\ \vdots & \vdots \\ v_{k,l}^{(n,1)} & v_{k,l}^{(n,2)} \end{pmatrix}\right) + f\left(s_{k,l}, \begin{pmatrix} \xi_{k,l}^{(1)} \\ \vdots \\ \xi_{k,l}^{(n)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{k,l}^{(1,3)} & v_{k,l}^{(1,4)} \\ \vdots & \vdots \\ v_{k,l}^{(n,3)} & v_{k,l}^{(n,4)} \end{pmatrix}\right) \Big) \quad (2.7)$$

$$\longrightarrow \inf!; \quad (\xi_{0,0}^{(1)}, \dots, \xi_{K,L}^{(n)}, v_{1,1}^{(1,1)}, \dots, v_{K,L}^{(n,4)}) \in \mathbb{R}^{n(K+1)(L+1)} \times \mathbb{R}^{4nKL}; \quad (2.8)$$

$$\xi_{0,l}^{(i)} = \xi_{K,l}^{(i)} = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq l \leq L; \quad (2.9)$$

$$\xi_{k,0}^{(i)} = \xi_{k,L}^{(i)} = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq k \leq K; \quad (2.10)$$

¹¹⁾ Im Sinne von [GOERING/ROOS/TOBISKA 93], pp. 28 und 40, (Z1) – (Z4), und p. 138, (Z5).

¹²⁾ Also erfüllt die Folge $\{\mathcal{T}_N\}$ der Triangulationen die Zlámal-Bedingung, siehe [CIARLET 87], pp. 124 und 130.

$$v_{k,l}^{(i,1)} = \frac{\xi_{k,l-1}^{(i)} - \xi_{k-1,l-1}^{(i)}}{(a/2^N)}; \quad v_{k,l}^{(i,2)} = \frac{\xi_{k,l}^{(i)} - \xi_{k,l-1}^{(i)}}{(b/2^N)}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L; \quad (2.11)$$

$$v_{k,l}^{(i,3)} = \frac{\xi_{k,l}^{(i)} - \xi_{k-1,l}^{(i)}}{(a/2^N)}; \quad v_{k,l}^{(i,4)} = \frac{\xi_{k-1,l}^{(i)} - \xi_{k-1,l-1}^{(i)}}{(b/2^N)}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L; \quad (2.12)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(|v_{k,l}^{(i,1)}|^q + |v_{k,l}^{(i,2)}|^q \right) \leq R^q, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L; \quad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(|v_{k,l}^{(i,3)}|^q + |v_{k,l}^{(i,4)}|^q \right) \leq R^q, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L. \quad (2.14)$$

Darin ist wiederum $K = a \cdot 2^N$, $L = b \cdot 2^N$, und die Knoten der Triangulation werden mit $s_{k,l}$ bezeichnet. Da die Steuervariablen nur stückweise stetig sind, mußte die klassische zweidimensionale Newton-Cotes-Kubaturformel¹³⁾ modifiziert werden.

b) Existenz globaler Minimallösungen für (P), (P)_N und (D)_N.

Satz 2.1. (Globale Minimallösungen von (P) und (P)_N) *Wir betrachten die Aufgabe (P) unter den Voraussetzungen von Abschnitt 2.a). Außerdem sei der Integrand $f(s, \xi, v)$ für fast alle $s \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ als Funktion von v konvex und erfülle eine Wachstumsbedingung der Gestalt*

$$|f(s, \xi, v)| \leq \varphi_1(s) + \varphi_2(|\xi|, |v|) \quad (\forall s \in \Omega \quad \forall (\xi, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{K}) \quad (2.15)$$

mit $\varphi_1 \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\varphi_1(s) \geq 0$ ($\forall s \in \Omega$), $\varphi_2 \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{K}, \mathbb{R})$, $\varphi_2(|\xi|, |v|) \geq 0$ ($\forall (\xi, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{K}$) einhält, wobei φ_2 eine monoton wachsende Funktion sowohl in $|\xi|$ als auch in $|v|$ ist.

1)¹⁴⁾ Dann besitzt (P) eine globale Minimallösung (\hat{x}, \hat{u}) .

2) Jede der Aufgaben (P)_N, $N \in \mathbb{N}$, besitzt eine globale Minimallösung (\hat{x}_N, \hat{u}_N) .

Beweis: 2) Die Argumente aus [PICKENHAIN/WAGNER 00], pp. 222 – 224, und [DACOROGNA 08], p. 378, Theorem 8.8., bleiben durch die Einschränkung des zulässigen Bereiches auf $(W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap X_0^N) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n \times 2})$ unberührt. ■

Satz 2.2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1. besitzt jede der Aufgaben (D)_N, $N \in \mathbb{N}$, eine globale Minimallösung $(\hat{\xi}_{0,0}^{(1)}, \dots, \hat{\xi}_{K,L}^{(n)}, \hat{v}_{1,1}^{(1,1)}, \dots, \hat{v}_{K,L}^{(n,4)})$.*

Beweis: Der zulässige Bereich von (D)_N ist nichtleer, konvex und kompakt, da sich aus den Gleichungen für $v_{k,l}^{(i,j)}$ und der Belegung der Randknoten mit $\xi_{k,0}^{(i)} = \xi_{k,L}^{(i)} = \xi_{0,l}^{(i)} = \xi_{K,l}^{(i)} = 0$ auch die Beschränktheit der Variablen $\xi_{k,l}^{(i)}$ ergibt. Die Zielfunktion \tilde{F} ist in sämtlichen Variablen stetig, also nimmt sie auf dem zulässigen Bereich ihr Minimum an. ■

c) Konvergenz des Diskretisierungsverfahrens.

Satz 2.3. (Konvergenzsatz für das Diskretisierungsverfahren zur Lösung von (P)) *Wir betrachten die Aufgaben (P), (P)_N und (D)_N unter den Voraussetzungen von Satz 2.1. Zusätzlich sei $1 < p < \infty$, und es gelte sowohl $4C_1\sigma_N/\sin\vartheta_0 \leq 1$ als auch $8nC_1(1+C_1)^{q-1}\sigma_N/\sin\vartheta_0 < 1$ mit $C_1 = R/c_q$.*

1) **(Beziehungen zwischen (P) und (P)_N)** *Für alle globalen Minimallösungen (\hat{x}, \hat{u}) von (P) und (\hat{x}_N, \hat{u}_N) von (P)_N besteht die Relation*

$$F(\hat{x}, \hat{u}) \leq F(\hat{x}_N, \hat{u}_N) \leq F(\hat{x}, \hat{u}) + C_2\sigma_N \quad (2.16)$$

¹³⁾ Vergleiche [MAESS 88], p. 238 f.

¹⁴⁾ [BRUNE/MAURER/WAGNER 08], p. 5, Satz 3.1.

mit einer von $N \in \mathbb{N}$ unabhängigen Konstante $C_2 > 0$. Außerdem besitzt jede Folge $\{(\hat{x}_N, \hat{u}_N)\}$ von globalen Minimalstellen von $(P)_N$ eine Teilfolge $\{(\hat{x}_{N'}, \hat{u}_{N'})\}$ mit

$$\|\hat{x}_{N'} - \hat{x}\|_{C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ und } (\hat{u}_{N'} - \hat{u}) \rightarrow \mathfrak{o}_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n \times 2})}, \quad (2.17)$$

wobei (\hat{x}, \hat{u}) eine globale Minimalstelle von (P) ist, und für die gesamte Folge gilt

$$|F(\hat{x}_N, \hat{u}_N) - F(\hat{x}, \hat{u})| \rightarrow 0. \quad (2.18)$$

2) **(Beziehungen zwischen (P) und $(D)_N$)** Für alle zulässigen Lösungen (x, u) von $(P)_N$ und alle Indizes $1 \leq k \leq K$, $1 \leq l \leq L$ mögen die Bedingungen

$$|f(s, x(s), u(s)) - f(s_{k-1, l-1}, x(s), u(s))| \leq C_3 \cdot \sigma_N \quad (\forall) s \in \Delta'_{k, l} \quad \text{und} \quad (2.19)$$

$$|f(s, x(s), u(s)) - f(s_{k, l}, x(s), u(s))| \leq C_3 \cdot \sigma_N \quad (\forall) s \in \Delta''_{k, l} \quad (2.20)$$

gelten. Weiter sei $(\hat{\xi}, \hat{v})$ eine globale Minimallösung von $(D)_N$, der wir die zulässige Lösung $(\tilde{x}_N, \tilde{u}_N)$ von $(P)_N$ gemäß

$$\tilde{x}_{N, i}(s_{k, l}) = \hat{\xi}_{k, l}^{(i)} \quad 0 \leq k \leq K, \quad 0 \leq l \leq L, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.21)$$

zuordnen. Dann besteht für alle globalen Minimallösungen (\hat{x}, \hat{u}) von (P) die Relation

$$F(\hat{x}, \hat{u}) \leq F(\tilde{x}_N, \tilde{u}_N) \leq F(\hat{x}, \hat{u}) + C_4 \sigma_N, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (2.22)$$

mit einer von $N \in \mathbb{N}$ unabhängigen Konstante $C_4 > 0$. Außerdem besitzt die Folge $\{(\tilde{x}_N, \tilde{u}_N)\}$ eine Teilfolge $\{(\tilde{x}_{N'}, \tilde{u}_{N'})\}$ mit

$$\|\tilde{x}_{N'} - \hat{x}\|_{C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ und } (\tilde{u}_{N'} - \hat{u}) \rightarrow \mathfrak{o}_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n \times 2})}, \quad (2.23)$$

wobei (\hat{x}, \hat{u}) eine globale Minimalstelle von (P) ist, und für die gesamte Folge gilt

$$|F(\tilde{x}_N, \tilde{u}_N) - F(\hat{x}, \hat{u})| \rightarrow 0. \quad (2.24)$$

Anmerkungen: 1. Die zusätzliche Voraussetzung in Teil 2) wird benötigt, da der Integrand f von s nur meßbar und wesentlich beschränkt abhängt.

2. Ist die globale Minimalstelle von (P) eindeutig bestimmt, so bestehen die Relationen (2.17) und (2.23) jeweils für die gesamten Folgen $\{(\hat{x}_N, \hat{u}_N)\}$ bzw. $\{(\tilde{x}_N, \tilde{u}_N)\}$, weil dann wegen (2.18) bzw. (2.24) alle schwach konvergenten Teilfolgen dasselbe Grenzelement besitzen.¹⁵⁾

Beweis: Der Beweis des Satzes wird in sieben Schritten erbracht.

• **Schritt 1:** C^∞ -Approximation einer globalen Minimallösung von (P) . Nach Satz 2.1. besitzt (P) eine globale Minimallösung $(\hat{x}, \hat{u}) \in W_0^{1, \infty}(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n \times 2})$. Wir ziehen folgenden Approximationssatz heran:

¹⁵⁾ [GAJEWSKI/GRÖGER/ZACHARIAS 74], p. 10, Lemma 5.4.

Satz 2.4. ¹⁶⁾ Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ Abschluß eines beschränkten Lipschitzgebietes, $K \subset \mathbb{R}^{nm}$ eine konvexe, kompakte Menge mit $\mathbf{o} \in \text{int}(K)$ und $\hat{x} \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit $J\hat{x}(s) \in K$ für fast alle $s \in \Omega$. Dann kann \hat{x} durch eine Folge von Funktionen $z^N \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ approximiert werden, welche die folgenden Eigenschaften aufweisen:

$$1) \lim_{N \rightarrow \infty} \|z^N - \hat{x}\|_{C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)} = 0, \quad (2.25)$$

$$2) \lim_{N \rightarrow \infty} \|Jz^N - J\hat{x}\|_{L^1(\Omega, \mathbb{R}^{nm})} = 0, \quad (2.26)$$

$$3) Jz^N(s) \in K \text{ für alle } s \in \Omega. \quad (2.27)$$

Daher können wir zu \hat{x} eine Funktion $z \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n \times 2})$ mit

$$\|z - \hat{x}\|_{C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)} + \|Jz - J\hat{x}\|_{L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n \times 2})} \leq \sigma_N \quad (2.28)$$

und $Jz(s) \in K$ für alle $s \in \Omega$ wählen. Die Lipschitzkonstante der Komponenten von z beträgt ebenfalls $C_1 = R/c_q$, und für \hat{x} und z folgt aus der Nullrandbedingung

$$\|\hat{x}_i\|_{C^0(\Omega, \mathbb{R})} \leq C_1 \cdot \text{Diam}(\Omega) = \frac{C_1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \|z_i\|_{C^0(\Omega, \mathbb{R})} \leq C_1 \cdot \text{Diam}(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.29)$$

• **Schritt 2:** *Stückweise affin-lineare Approximation von z .* Wir approximieren z durch jene stetige, affin-lineare Funktion $y \in X_0^N$, die in allen Eckpunkten der Dreiecke von \mathcal{T}_N mit z übereinstimmt. Zunächst folgt

$$\|y_i\|_{C^0(\Omega, \mathbb{R})} \leq \|z_i\|_{C^0(\Omega, \mathbb{R})} \leq C_1 \cdot \text{Diam}(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.30)$$

Weiterhin gelten folgende Ungleichungen:

Lemma 2.5. ¹⁷⁾ Gegeben sei eine Funktion $z \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n \times 2})$, so daß die Lipschitzkonstante der Komponenten jeweils $C_1 > 0$, beträgt. Dann bestehen für $1 \leq i \leq n$ die Abschätzungen

$$\left| z_i(s) - y_i(s) \right| \leq C_1 \cdot C_5 \cdot \sigma_N \quad \text{mit} \quad C_5 = 6 + \frac{32}{\sin \vartheta_0}; \quad (2.31)$$

$$\left| \frac{\partial z_i}{\partial s_j}(s) - \frac{\partial y_i}{\partial s_j}(s) \right| \leq C_1 \cdot C_6 \cdot \sigma_N \quad \text{mit} \quad C_6 = \frac{4}{\sin \vartheta_0}. \quad (2.32)$$

Aus Lemma 2.5. folgt, daß alle hinreichend großen $N \in \mathbb{N}$ jedes Paar $((1-D)y, (1-D)Jy)$ mit

$$0 < D = 2n C_1 (1 + C_1)^{q-1} C_6 \sigma_N < 1 \quad (2.33)$$

in $(P)_N$ zulässig ist. Dazu vergrößern wir N so weit, daß auch

$$C_1 \cdot C_6 \cdot \sigma_N \leq 1 \quad (2.34)$$

¹⁶⁾ [WAGNER 99], p. 2, Satz 1.5., mit $S(s) \equiv K$, $\Gamma = \partial\Omega$ und $c = \mathbf{o}$.

¹⁷⁾ [WAGNER 03], p. 41, Lemma 0.1. und 0.2., verändert nach [EKELAND/TÉMAM 99], p. 309, Proposition 2.1.

erfüllt ist. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial y_i}{\partial s_j}(s) \right|^q &\leq \left(\left| \frac{\partial z_i}{\partial s_j}(s) \right| + \left| \frac{\partial y_i}{\partial s_j}(s) - \frac{\partial z_i}{\partial s_j}(s) \right| \right)^q \\ &= \left| \frac{\partial z_i}{\partial s_j}(s) \right|^q + \sum_{k=1}^{q-1} \binom{q}{k} \cdot \left| \frac{\partial z_i}{\partial s_j}(s) \right|^k \cdot \left| \frac{\partial y_i}{\partial s_j}(s) - \frac{\partial z_i}{\partial s_j}(s) \right|^{q-k} \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\leq \left| \frac{\partial z_i}{\partial s_j}(s) \right|^q + \left| \frac{\partial y_i}{\partial s_j}(s) - \frac{\partial z_i}{\partial s_j}(s) \right| \cdot \sum_{k=1}^{q-1} \binom{q}{k} \cdot \left| \frac{\partial z_i}{\partial s_j}(s) \right|^k \cdot 1^{q-1-k} \quad (2.36)$$

$$\leq \left| \frac{\partial z_i}{\partial s_j}(s) \right|^q + \left| \frac{\partial y_i}{\partial s_j}(s) - \frac{\partial z_i}{\partial s_j}(s) \right| \cdot \sum_{k=1}^{q-1} \binom{q}{k} \cdot L^k \cdot 1^{q-k} \quad (2.37)$$

$$\leq \left| \frac{\partial z_i}{\partial s_j}(s) \right|^q + C_1 (1 + C_1)^{q-1} C_6 \sigma_N \implies \quad (2.38)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \left| \frac{\partial y_i}{\partial s_j}(s) \right|^q \leq R^q + 2n C_1 (1 + C_1)^{q-1} C_6 \sigma_N \implies \quad (2.39)$$

$$(1 - D) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \left| \frac{\partial y_i}{\partial s_j}(s) \right|^q \leq (1 - D) R^q + 2n C_1 (1 + C_1)^{q-1} C_6 \sigma_N. \quad (2.40)$$

Aus der Forderung

$$(1 - D) R^q + 2n C_1 (1 + C_1)^{q-1} C_6 \sigma_N \leq R^q \quad (2.41)$$

ergibt sich

$$D = 2n C_1 (1 + C_1)^{q-1} C_6 \sigma_N \quad (2.42)$$

sowie

$$\begin{aligned} \left| z_i(s) - (1 - D) y_i(s) \right| &\leq C_1 \cdot C_5 \cdot \sigma_N + D \cdot \left| y_i(s) \right| \\ &\leq \left(C_1 C_5 + 2n C_1 (1 + C_1)^{q-1} C_6 \cdot C_1 \text{Diam}(\Omega) \right) \cdot \sigma_N = C_7 \sigma_N; \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial z_i}{\partial s_j}(s) - (1 - D) \frac{\partial y_i}{\partial s_j}(s) \right| &\leq C_1 \cdot C_6 \cdot \sigma_N + D \left| \frac{\partial y_i}{\partial s_j}(s) \right| \\ &\leq \left(C_1 C_6 + 2n C_1 (1 + C_1)^{q-1} C_6 \cdot R \right) \cdot \sigma_N = C_8 \sigma_N. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Nun setzen wir $\tilde{y} = (1 - D)y$ und $\tilde{w} = (1 - D)Jy$.

• **Schritt 3:** Abschätzung der Zielfunktionswerte. Aus der stetigen Differenzierbarkeit des Integranden $f(s, \xi, v)$ nach ξ_i und v_{ij} ergibt sich mit (2.29):

$$\begin{aligned} \left| f(s, \xi', v) - f(s, \xi'', v) \right| &\leq \left(\text{Max}_{(s, \xi, v) \in \Omega \times A \times K} \left| \nabla_{\xi} f(s, \xi, v) \right| \right) \cdot \left| \xi' - \xi'' \right| \\ &= C_9 \cdot \left| \xi' - \xi'' \right| \quad (\forall s \in \Omega \quad \forall \xi', \xi'' \in A \quad \forall v \in K); \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \left| f(s, \xi, v') - f(s, \xi, v'') \right| &\leq \left(\text{Max}_{(s, \xi, v) \in \Omega \times A \times K} \left| \nabla_v f(s, \xi, v) \right| \right) \cdot \left| v' - v'' \right| \\ &= C_{10} \cdot \left| v' - v'' \right| \quad (\forall s \in \Omega \quad \forall \xi \in A \quad \forall v', v'' \in K), \end{aligned} \quad (2.46)$$

wobei $A \subset \mathbb{R}^n$ die Kugel mit Mittelpunkt \mathbf{o} und Radius $C_1 \cdot \text{Diam}(\Omega)$ und $\nabla_v f(s, \xi, v)$ den Vektor bezeichnet,

der aus den Spalten der Jacobimatrix mit den Einträgen $\partial f(s, \xi, v)/\partial v_{ij}$ gebildet wird. Hiermit folgt:

$$F(\hat{x}, \hat{u}) \leq F(\hat{x}_N, \hat{u}_N) \leq F(\tilde{y}, \tilde{w}) \leq F(\hat{x}, \hat{u}) + |F(z, Jz) - F(\hat{x}, \hat{u})| + |F(\tilde{y}, \tilde{w}) - F(z, Jz)| \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} &\leq F(\hat{x}, \hat{u}) + \int_{\Omega} \left(|f(s, z(s), Jz(s)) - f(s, \hat{x}(s), Jz(s))| + |f(s, \hat{x}(s), Jz(s)) - f(s, \hat{x}(s), \hat{u}(s))| \right) ds \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(|f(s, \tilde{y}(s), \tilde{w}(s)) - f(s, z(s), \tilde{w}(s))| + |f(s, z(s), \tilde{w}(s)) - f(s, z(s), Jz(s))| \right) ds \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} &\leq F(\hat{x}, \hat{u}) + \int_{\Omega} \left(C_9 |z(s) - \hat{x}(s)| + C_{10} |Jz(s) - \hat{u}(s)| \right) ds \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(C_9 |\tilde{y}(s) - z(s)| + C_{10} |\tilde{w}(s) - Jz(s)| \right) ds \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\leq F(\hat{x}, \hat{u}) + \left(|\Omega| C_9 \sqrt{n} + C_{10} \sqrt{2n} + |\Omega| C_7 C_9 \sqrt{n} + |\Omega| C_8 C_{10} \sqrt{2n} \right) \cdot \sigma_N. \quad (2.50)$$

Dabei wurden zur Abschätzung des ersten und zweiten Summanden (2.28), zur Abschätzung des dritten und vierten Summanden (2.43) bzw. (2.44) benutzt.

• **Schritt 4:** *Untersuchung der Folge* $\{(\hat{x}_N, \hat{u}_N)\}$. Wir wählen zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine globale Minimalstelle (\hat{x}_N, \hat{u}_N) von $(P)_N$. Alle (\hat{x}_N, \hat{u}_N) sind auch in (P) zulässig, und nach Schritt 3 bildet $\{(\hat{x}_N, \hat{u}_N)\}$, $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n \times 2})$ eine Minimalfolge für (P) . Diese besitzt eine schwach konvergente Teilfolge mit einem Grenzelement (\hat{x}, \hat{u}) . Die Zulässigkeit von (\hat{x}, \hat{u}) in (P) ergibt sich analog zu [WAGNER 96], p. 60, Lemma 4.2–10. Wegen $\hat{x}_N \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ darf die Folge insbesondere für $p > 2$ untersucht werden. Dann folgt aus dem Einbettungssatz von Rellich-Kondrachev¹⁸⁾ die Existenz einer bezüglich x gleichmäßig konvergenten Teilfolge. Damit ist Teil 1) vollständig bewiesen.

• **Schritt 5:** *Relationen zwischen zulässigen Lösungen von* $(P)_N$ *und* $(D)_N$. Wir beginnen den Beweis von Teil 2) mit folgendem

Lemma 2.6. *Wir betrachten die Probleme* $(P)_N$ *und* $(D)_N$ *unter den Voraussetzungen von Satz 2.1. Wenn für alle zulässigen Lösungen* (x, u) *von* $(P)_N$ *und alle Indizes* $1 \leq k \leq K$, $1 \leq l \leq L$ *die Bedingungen*

$$|f(s, x(s), u(s)) - f(s_{k-1, l-1}, x(s), u(s))| \leq C_3 \cdot \sigma_N \quad (\forall) s \in \Delta'_{k,l} \quad \text{und} \quad (2.51)$$

$$|f(s, x(s), u(s)) - f(s_{k,l}, x(s), u(s))| \leq C_3 \cdot \sigma_N \quad (\forall) s \in \Delta''_{k,l} \quad (2.52)$$

gelten, so existiert zu jeder zulässigen Lösung (x, u) von $(P)_N$ eine zulässige Lösung $(\xi_{0,0}^{(1)}, \dots, \xi_{K,L}^{(n)}, v_{1,1}^{(1,1)}, \dots, v_{K,L}^{(n,4)})$ von $(D)_N$ mit

$$|F(x, u) - \tilde{F}(\xi_{0,0}^{(1)}, \dots, \xi_{K,L}^{(n)}, v_{1,1}^{(1,1)}, \dots, v_{K,L}^{(n,4)})| \leq C_{11} \cdot \sigma_N, \quad (2.53)$$

und umgekehrt existiert zu jeder zulässigen Lösung $(\xi_{0,0}^{(1)}, \dots, \xi_{K,L}^{(n)}, v_{1,1}^{(1,1)}, \dots, v_{K,L}^{(n,4)})$ von $(D)_N$ eine zulässige Lösung (x, u) von $(P)_N$ mit

$$|\tilde{F}(\xi_{0,0}^{(1)}, \dots, \xi_{K,L}^{(n)}, v_{1,1}^{(1,1)}, \dots, v_{K,L}^{(n,4)}) - F(x, u)| \leq C_{11} \cdot \sigma_N. \quad (2.54)$$

Beweis: Sei (x, u) eine zulässige Lösung von $(P)_N$. Das Zielfunktional besitzt die Darstellung

$$F(x, u) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \left(\int_{\Delta'_{k,l}} f(s, x(s), u(s)) ds + \int_{\Delta''_{k,l}} f(s, x(s), u(s)) ds \right). \quad (2.55)$$

¹⁸⁾ [ADAMS/FOURNIER 07], p. 168, Theorem 6.3.

Setzen wir

$$\xi_{k,l}^{(i)} = x_i(s_{k,l}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq k \leq K, \quad 0 \leq l \leq L; \quad (2.56)$$

$$v_{k,l}^{(i,1)} = \frac{x_i(s_{k,l-1}) - x_i(s_{k-1,l-1})}{(a/2^N)}; \quad v_{k,l}^{(i,2)} = \frac{x_i(s_{k,l}) - x_i(s_{k,l-1})}{(b/2^N)}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L;$$

$$v_{k,l}^{(i,3)} = \frac{x_i(s_{k,l}) - x_i(s_{k-1,l})}{(a/2^N)}; \quad v_{k,l}^{(i,4)} = \frac{x_i(s_{k-1,l}) - x_i(s_{k-1,l-1})}{(b/2^N)}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L,$$

so bildet $(\xi_{0,0}^{(1)}, \dots, \xi_{K,L}^{(n)}, v_{1,1}^{(1,1)}, \dots, v_{K,L}^{(n,4)})$ eine zulässige Lösung von $(D)_N$, und die Differenz der Zielfunktionswerte kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} & \left| F(x, u) - \tilde{F}(\xi_{0,0}^{(1)}, \dots, \xi_{K,L}^{(n)}, v_{1,1}^{(1,1)}, \dots, v_{K,L}^{(n,4)}) \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \left(\int_{\Delta'_{kl}} \left| f(s, x(s), \begin{pmatrix} v_{k,l}^{(1,1)} & v_{k,l}^{(1,2)} \\ \vdots & \vdots \\ v_{k,l}^{(n,1)} & v_{k,l}^{(n,2)} \end{pmatrix}) - f(s_{k-1,l-1}, x(s), \begin{pmatrix} v_{k,l}^{(1,1)} & v_{k,l}^{(1,2)} \\ \vdots & \vdots \\ v_{k,l}^{(n,1)} & v_{k,l}^{(n,2)} \end{pmatrix}) \right| ds \\ & \quad + \int_{\Delta'_{kl}} \left| f(s_{k-1,l-1}, \begin{pmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_n(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{k,l}^{(1,1)} & v_{k,l}^{(1,2)} \\ \vdots & \vdots \\ v_{k,l}^{(n,1)} & v_{k,l}^{(n,2)} \end{pmatrix}) - f(s_{k-1,l-1}, \begin{pmatrix} \xi_{k-1,l-1}^{(1)} \\ \vdots \\ \xi_{k-1,l-1}^{(n)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{k,l}^{(1,1)} & v_{k,l}^{(1,2)} \\ \vdots & \vdots \\ v_{k,l}^{(n,1)} & v_{k,l}^{(n,2)} \end{pmatrix}) \right| ds \\ & \quad + \int_{\Delta''_{kl}} \left| f(s, x(s), \begin{pmatrix} v_{k,l}^{(1,3)} & v_{k,l}^{(1,4)} \\ \vdots & \vdots \\ v_{k,l}^{(n,3)} & v_{k,l}^{(n,4)} \end{pmatrix}) - f(s_{k,l}, x(s), \begin{pmatrix} v_{k,l}^{(1,3)} & v_{k,l}^{(1,4)} \\ \vdots & \vdots \\ v_{k,l}^{(n,3)} & v_{k,l}^{(n,4)} \end{pmatrix}) \right| ds \\ & \quad + \int_{\Delta''_{kl}} \left| f(s_{k,l}, \begin{pmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_n(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{k,l}^{(1,3)} & v_{k,l}^{(1,4)} \\ \vdots & \vdots \\ v_{k,l}^{(n,3)} & v_{k,l}^{(n,4)} \end{pmatrix}) - f(s_{k,l}, \begin{pmatrix} \xi_{k,l}^{(1)} \\ \vdots \\ \xi_{k,l}^{(n)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{k,l}^{(1,3)} & v_{k,l}^{(1,4)} \\ \vdots & \vdots \\ v_{k,l}^{(n,3)} & v_{k,l}^{(n,4)} \end{pmatrix}) \right| ds \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} & \leq \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \left(|\Delta'_{kl}| \cdot C_3 \cdot \sigma_N + |\Delta'_{kl}| \cdot C_9 \cdot \left| \begin{pmatrix} x_1(s) - \xi_{k-1,l-1}^{(1)} \\ \vdots \\ x_n(s) - \xi_{k-1,l-1}^{(n)} \end{pmatrix} \right| \right. \\ & \quad \left. + |\Delta''_{kl}| \cdot C_3 \cdot \sigma_N + |\Delta''_{kl}| \cdot C_9 \cdot \left| \begin{pmatrix} x_1(s) - \xi_{k,l}^{(1)} \\ \vdots \\ x_n(s) - \xi_{k,l}^{(n)} \end{pmatrix} \right| \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\leq (|\Omega| \cdot C_3 + |\Omega| \cdot C_9 \cdot C_1 \cdot \sqrt{n} \cdot 2) \cdot \sigma_N = C_{11} \sigma_N. \quad (2.59)$$

Umgekehrt kann aus einer zulässigen Lösung $(\xi_{0,0}^{(1)}, \dots, \xi_{K,L}^{(n)}, v_{1,1}^{(1,1)}, \dots, v_{K,L}^{(n,4)})$ von $(D)_N$ unmittelbar eine zulässige Lösung (x, u) von $(P)_N$ gemäß $x_i(s_{kl}) = \xi_{kl}^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq k \leq K$, $0 \leq l \leq L$, aufgebaut werden. Die Abschätzung für die Differenz der Zielfunktionswerte bleibt dieselbe. ■

• **Schritt 6: Erneute Abschätzung der Zielfunktionswerte.** Nun betrachten wir eine globale Minimallösung $(\hat{\xi}_{0,0}^{(1)}, \dots, \hat{\xi}_{K,L}^{(n)}, \hat{v}_{1,1}^{(1,1)}, \dots, \hat{v}_{K,L}^{(n,4)})$ von $(D)_N$ und die zugehörige zulässige Lösung $(\tilde{x}_N, \tilde{u}_N)$ von $(P)_N$ gemäß $\tilde{x}_{N,i}(s_{k,l}) = \hat{\xi}_{k,l}^{(i)}$ und $\tilde{u}_{N,i,j}(s) = \partial \tilde{x}_{N,i}(s) / \partial s_j$. Weiter sei (\hat{x}, \hat{u}) eine globale Minimalstelle von (P) und (\hat{x}_N, \hat{u}_N) eine globale Minimalstelle von $(P)_N$. (ξ, v) sei die zulässige Lösung von $(D)_N$, die analog zu (2.56) mit $\xi_{k,l}^{(i)} = \hat{x}_{N,i}(s_{k,l})$ gebildet wird. Dann gilt nach Teil 1) und Lemma 2.6.:

$$\begin{aligned} F(\hat{x}, \hat{u}) & \leq F(\hat{x}_N, \hat{u}_N) \leq F(\tilde{x}_N, \tilde{u}_N) \leq \tilde{F}(\hat{\xi}, \hat{v}) + C_{11} \sigma_N \leq \tilde{F}(\xi, v) + C_{11} \sigma_N \\ & \leq F(\hat{x}_N, \hat{u}_N) + 2C_{11} \sigma_N \leq F(\hat{x}, \hat{u}) + (C_2 + 2C_{11}) \cdot \sigma_N = F(\hat{x}, \hat{u}) + C_4 \sigma_N. \end{aligned} \quad (2.60)$$

• **Schritt 7:** *Untersuchung der Folge* $\{(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n)\}$. Alle Paare $(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n)$ sind in (P) zulässig, und aus (2.60) folgt, daß auch $\{(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n)\}$, $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n \times 2})$ eine Minimalfolge für (P) bildet. Die Existenz einer Teilfolge mit den geforderten Eigenschaften ergibt sich wie in Schritt 4. Damit ist auch Teil 2) des Satzes bewiesen. ■

3. Anwendung auf das image-restoration-Problem.

a) Das image-restoration-Problem.

Im gesamten Kapitel beschreiben wir *Graustufenbilder* durch mindestens meßbare Funktionen x mit rechteckigem Definitionsbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und Werten $0 \leq x(s) \leq 1$ ($\forall s \in \Omega$). Die Aufzeichnung eines Graustufenbildes $x: \Omega \rightarrow [0, 1]$ kann im einfachsten Fall durch eine Gleichung

$$I(t) = \mathcal{S}(x(s)) + \mathcal{N}(s) \quad (3.1)$$

modelliert werden, worin der Operator \mathcal{S} die systematischen Fehler bei der Aufzeichnung beschreibt, während die zufälligen Fehler in einem Rauschterm $\mathcal{N}(s)$ zusammengefaßt werden.¹⁹⁾ Bei der formalen Lösung der Gleichung (3.1),

$$x(s) = \mathcal{S}^{-1}(I(s)) - \mathcal{S}^{-1}(\mathcal{N}(s)), \quad (3.2)$$

entsteht jedoch ein inkorrekt gestelltes Problem. Ausgehend vom “scale-space”-Konzept, bei dem die gestörten Bilddaten $I(s)$ mit Hilfe eines Diffusionsprozesses geglättet werden,²⁰⁾ wurden zur Lösung des image-restoration-Problems seit den 90er Jahren Variationsmethoden vorgeschlagen. Diese beruhen auf der Minimierung des Defekts $\mathcal{S}(x(s)) - I(s)$ zusammen mit einem Regularisierungsterm, in den die ersten verallgemeinerten Ableitungen von x eingehen. Während in den Diffusionsverfahren $x \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ vorausgesetzt werden mußte, formuliert man die Variationsprobleme in Sobolevräumen $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$ bzw. im Raum $BV(\Omega, \mathbb{R})$ ²¹⁾ der Funktionen beschränkter Totalvariation.²²⁾ Die ursprünglichen Bilder x gehören jedoch im allgemeinen auch nicht zu $BV(\Omega, \mathbb{R})$, dem umfassendsten der verwendeten Räume.²³⁾ Insofern beinhalten alle bisher vorgeschlagenen Methoden einen Kompromiß: anstelle des ursprünglichen Bildes x wird eine Repräsentation aufgesucht, die zusätzlich ein vorgeschriebenes Maß an Glätte aufweist (“image smoothing”). Im folgenden setzen wir $\mathcal{S}(x(s)) = x(s)$ voraus und formulieren das entsprechende Variationsproblem im Sobolevraum $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$:

$$(V)^{(1)}: \quad F(x) = \int_{\Omega} (x(s) - I(s))^2 ds + \mu \cdot \int_{\Omega} f(|\nabla x(s)|) ds \longrightarrow \inf!; \quad x \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) \quad (3.3)$$

mit $1 \leq p < \infty$, $I \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $0 \leq I(s) \leq 1$ ($\forall s \in \Omega$), einem Regularisierungsparameter $\mu > 0$ und einem Integranden $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, der den passenden Wachstumsbedingungen genügt.

¹⁹⁾ Siehe [AUBERT/KORNPROBST 06], pp. 68 ff., und [CHAMBOLLE 00], pp. 7 ff.

²⁰⁾ [AUBERT/KORNPROBST 06], pp. 94 ff., [WEICKERT 96], pp. 2 – 18.

²¹⁾ Siehe [EVANS/GARIEPY 92], pp. 166 ff.

²²⁾ Für die Behandlung von image-restoration-Problemen im Raum $BV(\Omega, \mathbb{R})$ verweisen wir beispielsweise auf [AUJOL/AUBERT/BLANC-FÉRAUD/CHAMBOLLE 05], [CHAMBOLLE 00], [CHAMBOLLE/LIONS 97], [HINTERBERGER/HINTERMÜLLER/KUNISCH/OEHSEN/SCHERZER 03], [OSHER/BURGER/GOLDFARB/XU/YIN 05] und die grundlegende Arbeit [RUDIN/OSHER/FATEMI 92].

²³⁾ Diese Schlußfolgerung wird durch [GOUSSEAU/MOREL 01] nahegelegt.

Ein wesentliches Ziel bei der Wiederherstellung bzw. Glättung von Bildern besteht darin, “scharfe Kanten” so weit wie möglich zu erhalten.²⁴⁾ Hierfür empfiehlt sich ein anisotroper Regularisierungsterm der Gestalt

$$\int_{\Omega} \sqrt{|\nabla x(s)|^2 + \eta^2} ds \quad (3.4)$$

der für hinreichend kleines $\eta > 0$ als Approximation für die L^1 - bzw. Totalvariationsnorm von ∇x verstanden werden kann, dabei aber deren Nachteile vermeidet (der Integrand von (3.4) ist im Nullpunkt differenzierbar, reduziertes “staircasing”).

b) Kantenerkennung in verrauschten Bilddaten.

Eine simultane Kantenerkennung im image-restoration-Problem kann zunächst dadurch ausgeführt werden, daß man das Zielfunktional in (V)⁽¹⁾ durch ein sog. Ambrosio-Tortorelli-Funktional ersetzt. Dabei wird zusätzlich zum wiederhergestellten Bild eine Funktion k als “Kantenskizze” aufgesucht, wobei $k(s) \approx 0$ oder $k(s) \approx 1$, je nachdem der Punkt $s \in \Omega$ zu einer Kante in x gehört oder nicht. Es entsteht folgendes Variationsproblem:

$$\begin{aligned} (V)^{(2)}: \quad F(x, k) = & c_1(\varepsilon) \cdot \int_{\Omega} (x(s) - I(s))^2 ds + c_2(\varepsilon) \cdot \int_{\Omega} |\nabla x(s)|^p \cdot (k(s)^2 + c_4(\varepsilon)) ds \\ & + c_3(\varepsilon) \cdot \int_{\Omega} \left(\varepsilon \cdot |\nabla k(s)|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \cdot (k(s) - 1)^2 \right) ds \longrightarrow \inf!; \quad (x, k) \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) \times W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit I wie oben, $\varepsilon > 0$ und Gewichten $c_i(\varepsilon) > 0$, $1 \leq i \leq 4$.²⁵⁾ Der erste Term im Zielfunktional ist der klassische Defektminimierungsterm. Der zweite Term ersetzt den Regularisierungsterm in (V)⁽¹⁾ und koppelt x und k derart, daß in Punkten $s \in \Omega$ mit betragsgroßem $\nabla x(s)$ der Wert $k(s) \approx 0$ bevorzugt wird. Im dritten Summanden bewirkt der erste Term eine quadratische Regularisierung von k , während der zweite erzwingt, daß bis auf eine Menge kleinen Maßes $k(s) \approx 1$ gilt. Die Interpretation von k als Kantenskizze wird gerechtfertigt, indem man die Γ -Konvergenz der Lösungen von (V)⁽²⁾ gegen die Lösung eines Variationsproblems mit einem Mumford-Shah-Funktional nachweist.²⁶⁾

Die zweite Möglichkeit zur Kantenerkennung im image-restoration-Problem besteht darin, zum Variationsproblem (V)⁽¹⁾ eine konvexe Restriktion für ∇x hinzuzufügen, womit (V)⁽¹⁾ in ein mehrdimensionales Steuerungsproblem vom Dieudonné-Rashevsky-Typ übergeht. Unter Einbeziehung des Regularisierungsterms (3.4) lautet die Aufgabe folgendermaßen:

$$(P)^{(1)}: \quad F(x, u) = \int_{\Omega} (x(s) - I(s))^2 ds + \mu \cdot \int_{\Omega} \sqrt{u_1(s)^2 + u_2(s)^2 + \eta^2} ds \longrightarrow \inf!; \quad (3.6)$$

$$(x, u) \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^2); \quad (3.7)$$

$$\nabla x(s) = \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} \quad (\forall) s \in \Omega; \quad (3.8)$$

$$u \in U = \{ u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid |u_1(s)|^q + |u_2(s)|^q \leq R^q \quad (\forall) s \in \Omega \}. \quad (3.9)$$

²⁴⁾ Hier tritt erneut der Kompromißcharakter der Verfahren innerhalb von Sobolevräumen hervor: “The theory seems to adopt again what it tried to avoid.” ([CATTÉ/LIONS/MOREL/COLL 92], p. 183).

²⁵⁾ Dieses Funktional wurde in [AMBROSIO/TORTORELLI 92], p. 111, bzw. [BELLETTINI/COSCIA 94], p. 205, (2.1), als Approximation für das Mumford-Shah-Funktional vorgeschlagen. Siehe auch [AUBERT/KORNPROBST 06], pp. 166 – 173.

²⁶⁾ [BELLETTINI/COSCIA 94], p. 205 f., Theorem 2.1., für $p = 2$.

Darin ist $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\mu > 0$, $\eta > 0$, $R > 0$ und I wie oben. Der Kantendetektor k wird unmittelbar aus den Steuervariablen u_1 und u_2 aufgebaut, beispielsweise²⁷⁾

$$k(s) = 1 - \frac{1}{R^q} \left(|u_1(s)|^q + |u_2(s)|^q \right). \quad (3.10)$$

Damit werden diejenigen Teilmengen von Ω als ‘‘Kanten’’ interpretiert, auf denen die Steuerbeschränkung nahezu aktiv wird.

Die Voraussetzungen von Satz 2.1. treffen auf (P)⁽¹⁾ zu: Wegen $0 \leq I(s) \leq 1$ für alle $s \in \Omega$ folgt

$$f(s, \xi, v) = (\xi - I(s))^2 + \mu \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \eta^2} \implies |f(s, \xi, v)| \leq \xi^2 + 2|\xi| + \mu \sqrt{|v|^2 + \eta^2}, \quad (3.11)$$

also ist die Wachstumsbedingung mit $\varphi_1(s) \equiv 0$ und $\varphi_2(|\xi|, |v|) = |\xi|^2 + 2|\xi| + \mu \sqrt{|v|^2 + \eta^2}$ erfüllt.

c) Numerische Lösung des diskretisierten Steuerungsproblems.

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir das image-restoration-Problem mit simultaner Kantenerkennung als mehrdimensionales Steuerungsproblem (P)⁽¹⁾ und lösen die Aufgabe mit Hilfe der in Kapitel 2 begründeten Diskretisierungsmethode. Wir wählen $a = b = 128$ und $N = 7$ und zerlegen $\Omega = [0, 128]^2$ in $(K \times L)$ Pixel $Q_{k,l}$ mit Kantenlänge 1 und nordöstlichem Knotenpunkt $s_{k,l}$. Die Feinheit der Zerlegung beträgt dann $\sigma_N = \sqrt{2}/2$. Die verrauschten Bilddaten $I(s)$ sind bereits als pixelweise konstante Funktion gegeben. Deshalb sind die Voraussetzungen (2.19) – (2.20) in Satz 2.3., 3) mit $C_3 = 0$ erfüllt, und wir können $I(s) \big|_{Q_{k,l}} \equiv I(s_{k,l})$, $1 \leq k \leq K$, $1 \leq l \leq L$, benutzen. Als diskretisiertes Problem entsteht

$$(D)_N^{(1)}: \quad \tilde{F}(\xi_{11}^{(1)}, \dots, \xi_{KL}^{(1)}, v_{11}^{(1,1)}, \dots, v_{KL}^{(1,4)}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{4^N} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \left((\xi_{k-1,l-1}^{(1)} - I(s_{k,l}))^2 + (\xi_{k,l}^{(1)} - I(s_{k,l}))^2 \right. \\ \left. + \mu \sqrt{(v_{k,l}^{(1,1)})^2 + v_{k,l}^{(1,2)})^2 + \eta^2} + \mu \sqrt{(v_{k,l}^{(1,3)})^2 + v_{k,l}^{(1,4)})^2 + \eta^2} \right) \longrightarrow \inf!; \quad (3.12)$$

$$(\xi_{0,0}^{(1)}, \dots, \xi_{K,L}^{(1)}, v_{1,1}^{(1,1)}, \dots, v_{K,L}^{(1,4)}) \in \mathbb{R}^{(K+1)(L+1)} \times \mathbb{R}^{4KL}; \quad (3.13)$$

$$\xi_{0,l}^{(1)} = \xi_{K,l}^{(1)} = 0, \quad 0 \leq l \leq L; \quad (3.14)$$

$$\xi_{k,0}^{(1)} = \xi_{k,L}^{(1)} = 0, \quad 0 \leq k \leq K; \quad (3.15)$$

$$v_{k,l}^{(1,1)} = \frac{\xi_{k,l-1}^{(1)} - \xi_{k-1,l-1}^{(1)}}{(a/2^N)}; \quad v_{k,l}^{(1,2)} = \frac{\xi_{k,l}^{(1)} - \xi_{k,l-1}^{(1)}}{(b/2^N)}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L; \quad (3.16)$$

$$v_{k,l}^{(1,3)} = \frac{\xi_{k,l}^{(1)} - \xi_{k-1,l}^{(1)}}{(a/2^N)}; \quad v_{k,l}^{(1,4)} = \frac{\xi_{k-1,l}^{(1)} - \xi_{k-1,l-1}^{(1)}}{(b/2^N)}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L; \quad (3.17)$$

$$|v_{k,l}^{(1,1)}|^q + |v_{k,l}^{(1,2)}|^q \leq R^q, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L; \quad (3.18)$$

$$|v_{k,l}^{(1,3)}|^q + |v_{k,l}^{(1,4)}|^q \leq R^q, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L. \quad (3.19)$$

Als Diskretisierung des Kantendetektors erhalten wir

$$k(s_{k,l}) = 1 - \frac{1}{R^q} \text{Max} \left(|v_{k,l}^{(1,1)}|^q + |v_{k,l}^{(1,2)}|^q, |v_{k,l}^{(1,3)}|^q + |v_{k,l}^{(1,4)}|^q \right). \quad (3.20)$$

²⁷⁾ Vergleiche [FRANEK 07A], p. 65.

Die bei der Auswertung der notwendigen Optimalitätsbedingungen (Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen) entstehenden großen nichtlinearen Gleichungssysteme können mit Innere-Punkte-Verfahren sehr genau und effizient gelöst werden. Dabei haben wir als Ein- und Ausgabeplattform MATLAB benutzt. Das diskretisierte Problem wurde mit Hilfe der Modellierungssprache AMPL formuliert²⁸⁾ und aus MATLAB heraus an den Innere-Punkte-Solver IPOPT²⁹⁾ übergeben. Die Ergebnisse wurden mit Hilfe von MATLAB präsentiert, bewertet und archiviert.

d) Bilddaten und Bewertungskriterien.

Wir benutzen einen Ausschnitt des bekannten Lena-Testbilds,³⁰⁾ der künstlich mit weißem Rauschen gestört wurde³¹⁾ (Abb. 3.1. und 3.2.). Dabei ist $K = L = 128$. Als Gütekriterium für die Bildwiederherstellung benutzen wir den SNR-Indikator

$$SNR(\hat{x}, x) = -10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L (x_{kl} - \hat{x}(s_{kl}))^2}{\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L (\hat{x}(s_{kl}))^2} \right) \approx -10 \log_{10} \left(\frac{\int_{\Omega} (x(s) - \hat{x}(s))^2 ds}{\int_{\Omega} \hat{x}(s)^2 ds} \right). \quad (3.21)$$

Allgemein anerkannte Kriterien für die Bewertung der Kantenbilder sind dagegen in der Literatur bisher nicht vorhanden. Wir beziehen uns daher auf eine Kantenskizze \hat{k} , die mit Hilfe des Ambrosio-Tortorelli-Funktional (3.5) aus den ungestörten Bilddaten gewonnen wurde (Abb. 3.3.) und benutzen das folgende Fehlermaß IEE (“intensity edge error”):

$$IEE(\hat{x}, x) = \frac{1}{KL} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L (k(s_{kl}) - \hat{k}(s_{kl}))^2 \approx \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (k(s) - \hat{k}(s))^2 ds. \quad (3.22)$$



Abb. 3.1.



Abb. 3.2.

Ausschnitt aus dem Lena-Testbild:
ungestört (links) bzw. verrauscht
mit $SNR(\hat{x}, x) = 12.4569$ (rechts)

²⁸⁾ AMPL ist eine kommerzielle mathematische Modellierungssprache, die es mit einer leicht verständlichen Syntax ermöglicht, ein Optimierungsproblem zu formulieren, einem Solver zu übergeben und dessen Ausgabe weiterzuverarbeiten. Siehe [FOURER/GAY/KERNIGHAN 02].

²⁹⁾ [LAIRD/WÄCHTER 07], [WÄCHTER/BIEGLER 06].

³⁰⁾ Elektronisch zugänglich unter http://www.am.uni-duesseldorf.de/~witsch/html/lehre/bild-06/lena_gray.tif (letzter Zugriff: 14. 07. 2008).

³¹⁾ Mit Standardabweichung Null und Varianz $\sigma = 0.01$.



Abb. 3.3.

Variationsproblem $(V)^{(2)}$ mit Ambrosio-Tortorelli-Funktional: Kantenskizze \hat{k} zum ungestörten Lena-Testbild

$$p = 2, \varepsilon = 0.5, c_1(\varepsilon) = 1275, c_2(\varepsilon) = 10, c_3(\varepsilon) = 0.5, c_4(\varepsilon) = 0$$

e) Numerische Resultate.

Um das vorgeschlagene Diskretisierungsverfahren mit einer bestehenden Methode vergleichen zu können, wurde zunächst das Variationsproblem $(V)^{(2)}$ behandelt.³²⁾ Mit den Parametern $p = 2$ und $\varepsilon = 0.5$ entstehen die in Abb. 3.4. – 3.5. dargestellten Ergebnisse.



Abb. 3.4.



Abb. 3.5.

Variationsproblem $(V)^{(2)}$ mit Ambrosio-Tortorelli-Funktional: geglättetes Bild (links) und Kantenskizze (rechts) zum verrauschten Lena-Testbild

$$p = 2, \varepsilon = 0.5, c_1(\varepsilon) = 3, c_2(\varepsilon) = 30, c_3(\varepsilon) = 1.2, c_4(\varepsilon) = 0$$

$$SNR = 16.1037, IEE = 18.7680$$

Bei der numerischen Lösung des mehrdimensionalen Steuerungsproblems $(P)^{(1)}$ setzen wir $p = q = 2$, $\mu = 0.5$, $\eta = 0.01$ und variieren R . Die Kantenskizzen wurden mit Hilfe des diskretisierten Kantendetektors (3.20) erzeugt. Abb. 3.6. – 3.13. zeigen die Ergebnisse für das ungestörte Lena-Testbild aus Abb. 3.1.; die zweite Serie (Abb. 3.14. – 3.21.) wurde mit den verrauschten Bilddaten aus Abb. 3.2. berechnet.

³²⁾ Im Anschluß an [BOURDIN 99] wurde $(V)^{(2)}$ ebenfalls durch Anwendung einer direkten Methode gelöst.

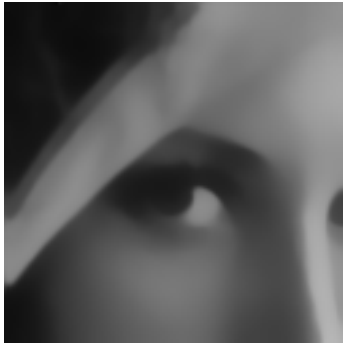


Abb. 3.6.



Abb. 3.7.

Steuerungsproblem $(P)^{(1)}$ mit robustem TV-Regularisierungsterm: ungestörtes Lena-Testbild

$$R = 0.25(?),$$

$$SNR = 16.3235, IEE = 28.7146$$

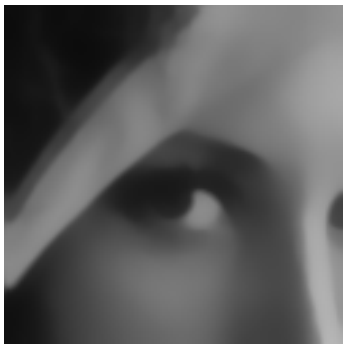


Abb. 3.8.



Abb. 3.9.

Steuerungsproblem $(P)^{(1)}$ mit robustem TV-Regularisierungsterm: ungestörtes Lena-Testbild

$$R = 0.125(?),$$

$$SNR = 16.2890, IEE = 24.9645$$

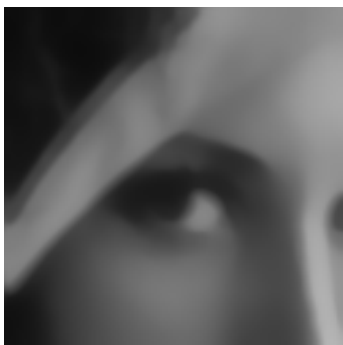


Abb. 3.10.



Abb. 3.11.

Steuerungsproblem $(P)^{(1)}$ mit robustem TV-Regularisierungsterm: ungestörtes Lena-Testbild

$$R = 0.0625(?),$$

$$SNR = 15.7875, IEE = 21.9830$$

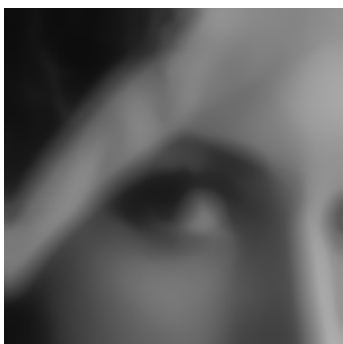


Abb. 3.12.



Abb. 3.13.

Steuerungsproblem $(P)^{(1)}$ mit robustem TV-Regularisierungsterm: ungestörtes Lena-Testbild

$$R = 0.03125(?),$$

$$SNR = 14.4561, IEE = 34.6860$$



Abb. 3.14.



Abb. 3.15.

Steuerungsproblem $(P)^{(1)}$ mit robustem TV-Regularisierungsterm: verrauschtes Lena-Testbild

$$R = 0.25(?),$$

$$SNR = 16.7465, IEE = 29.0117$$



Abb. 3.16.



Abb. 3.17.

Steuerungsproblem $(P)^{(1)}$ mit robustem TV-Regularisierungsterm: verrauschtes Lena-Testbild

$$R = 0.125(?),$$

$$SNR = 16.6978, IEE = 25.2298$$

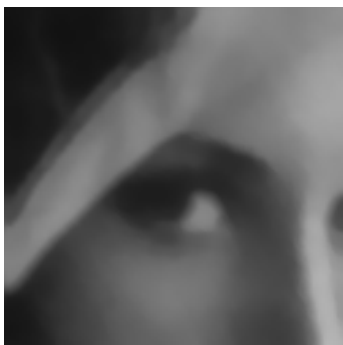


Abb. 3.18.



Abb. 3.19.

Steuerungsproblem $(P)^{(1)}$ mit robustem TV-Regularisierungsterm: verrauschtes Lena-Testbild

$$R = 0.0625(?),$$

$$SNR = 16.1393, IEE = 22.8745$$

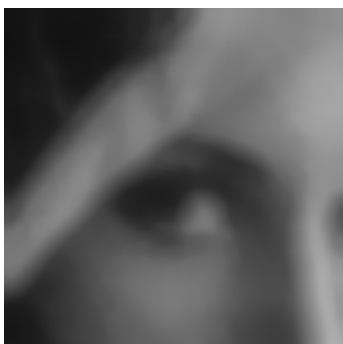


Abb. 3.20.



Abb. 3.21.

Steuerungsproblem $(P)^{(1)}$ mit robustem TV-Regularisierungsterm: verrauschtes Lena-Testbild

$$R = 0.03125(?),$$

$$SNR = 14.6684, IEE = 35.0349$$

f) Diskussion der Ergebnisse.

Vergleichen wir die Lösungen der *Steuerungsprobleme untereinander*, so entstehen die besten Ergebnisse sowohl beim visuellen Vergleich als auch beim Vergleich der IEE-Werte jeweils für $R \approx 0.06$. Unverrauschte und verrauschte Daten führen weder bei den SNR- noch den IEE-Werten zu signifikanten Unterschieden. Wählt man R zu klein, so entstehen “überfüllte” Kantenskizzen (Abb. 3.13. und 3.21.). Dagegen ergab eine Vergrößerung von R über 0.25 hinaus keine Änderung der Kantensbilder. Wiewohl die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes (Satz 2.3.) nur für

$$R < \text{Min} \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) = 0.112372 \dots \quad (3.23)$$

erfüllt sind, entstehen auch für $R \in [0.11, 0.25]$ sinnvolle Ergebnisse.

Der *visuelle Vergleich zwischen Variations- und Steuerungsmethode* zeigt, daß die Steuerungsmethode klarere Kantensbilder liefert, wobei aber feine Details verlorengehen können. Die vom Variationsverfahren erzeugte Kantenskizze \hat{k} (Abb. 3.3.) scheint dagegen auch viele “überflüssige” Details zu enthalten. Innerhalb der ungestörten Daten in Abb. 3.1. werden die Wimpern nur vom Variationsverfahren erkannt, während das Detail am Hutrand über der Bildmitte auch von der Steuerungsmethode erkannt wird. Innerhalb der verrauschten Daten wird dieses Detail von der Steuerungsmethode (Abb. 3.19.) besser als von der Variationsmethode rekonstruiert (Abb. 3.5.).

Ein *quantitativer Vergleich zwischen Variations- und Steuerungsmethode* ist nur für die verrauschten Bild-daten möglich, da alle IEE-Werte auf \hat{k} bezogen werden mußten. Das beste Ergebnis der Steuerungsmethode (Abb. 3.18. – 3.19.) weist im Vergleich mit der Variationsmethode einen nahezu identischen SNR-Wert und einen nur geringfügig schlechteren IEE-Wert auf, wobei möglicherweise gerade die durch die Steuerungsmethode unterdrückten “überflüssigen” Details von \hat{k} ins Gewicht fallen.

Zusammenfassend können wir festhalten, daß die vorgestellten Variations- und Steuerungsmethoden Ergebnisse vergleichbarer Güte liefern. Die Behandlung des image-restoration-Problems mit simultaner Kanten-erkennung im Rahmen der optimalen Steuerung stellt daher eine echte Alternative zu den bestehenden Variationsmethoden dar.

Literaturverzeichnis.

1. [ADAMS/FOURNIER 07] Adams, R. A.; Fournier, J. J. F.: *Sobolev Spaces*. Academic Press / Elsevier; Amsterdam etc. 2007, 2. Aufl.
2. [AMBROSIO/TORTORELLI 92] Ambrosio, L.; Tortorelli, V. M.: *On the approximation of free discontinuity problems*. Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **6** (1992), 105 – 123
3. [ANDREJEW/ KLÖTZLER 84A] Andrejewa, J. A.; Klötzler, R.: *Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsproblemen. Teil I*. Z. Angew. Math. Mech. **64** (1984), 35 – 44
4. [ANDREJEW/ KLÖTZLER 84B] Andrejewa, J. A.; Klötzler, R.: *Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsproblemen. Teil II*. Z. Angew. Math. Mech. **64** (1984), 147 – 153
5. [AUJOL/AUBERT/BLANC-FÉRAUD/CHAMBOLLE 05] Aujol, J.-F.; Aubert, G.; Blanc-Féraud, L.; Chambolle, A.: *Image decomposition into a bounded variation component and an oscillating component*. J. Math. Imaging Vision **22** (2005), 71 – 88
6. [AUBERT/KORNPROBST 06] Aubert, G.; Kornprobst, P.: *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. Springer; New York etc. 2006, 2. Aufl.
7. [BELLETTINI/COSCIA 94] Bellettini, G.; Coscia, A.: *Discrete approximation of a free discontinuity problem*. Numer. Funct. Anal. Optim. **15** (1994), 201 – 224

-
8. [BOURDIN 99] Bourdin, B.: *Image segmentation with a finite element method*. M2AN Mathematical Modelling and Numerical Analysis **33** (1999), 229 – 244
 9. [BROKATE 85] Brokate, M.: *Pontryagin's principle for control problems in age-dependent population dynamics*. J. Math. Biology **23** (1985), 75 – 101
 10. [BRUNE/MAURER/WAGNER 08] Brune, C.; Maurer, H.; Wagner, M.: *Kantenerkennung im optischen Fluß als mehrdimensionales Steuerungsproblem*. BTU Cottbus, Preprint-Reihe Mathematik, Preprint Nr. M-01/2008. Submitted: SIAM Journal on Imaging Sciences
 11. [CATTÉ/LIONS/MOREL/COLL 92] Catté, F.; Lions, P.-L.; Morel, J.-M.; Coll, T.: *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*. SIAM J. Numer. Anal. **29** (1992), 182 – 193
 12. [CHAMBOLLE 00] Chambolle, A.: *Mathematical problems in image processing. Inverse problems in image processing and image segmentation: some mathematical and numerical aspects*. ICTP Lecture Notes, II. Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste 2000 (electronic)
 13. [CHAMBOLLE/LIONS 97] Chambolle, A.; Lions, P.-L.: *Image recovery via total variation minimization and related problems*. Numer. Math. **76** (1997), 167 – 188
 14. [CIARLET 87] Ciarlet, P.: *The Finite Element Methods for Elliptic Problems*. North-Holland; Amsterdam - New York - Oxford - Tokyo 1987, 2. Aufl.
 15. [DACOROGNA 08] Dacorogna, B.: *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Springer; New York etc. 2008, 2. Aufl.
 16. [DACOROGNA/MARCELLINI 97] Dacorogna, B.; Marcellini, P.: *General existence theorems for Hamilton-Jacobi equations in the scalar and vectorial case*. Acta Mathematica **178** (1997), 1 – 37
 17. [DACOROGNA/MARCELLINI 98] Dacorogna, B.; Marcellini, P.: *Cauchy-Dirichlet problem for first order nonlinear systems*. J. Funct. Anal. **152** (1998), 404 – 446
 18. [DACOROGNA/MARCELLINI 99] Dacorogna, B.; Marcellini, P.: *Implicit Partial Differential Equations*. Birkhäuser; Boston - Basel - Berlin 1999
 19. [DEWESS/HELBIG 95] Deweiß, G.; Helbig, P.: *Einschätzen und Optimieren von Verkehrsflüssen*. In: Bachem, A.; Jünger, M.; Schrader, R. (Hrsg.): *Mathematik in der Praxis. Fallstudien aus Industrie, Wirtschaft, Naturwissenschaften und Medizin*. Springer; Berlin etc. 1995, 473 – 492
 20. [EKELAND/TÉMAM 99] Ekeland, I.; Témam, R.: *Convex Analysis and Variational Problems*. SIAM; Philadelphia 1999, 2. Aufl.
 21. [EVANS/GARIEPY 92] Evans, L. C.; Gariepy, R. F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press; Boca Raton etc. 1992
 22. [FEICHTINGER/TRAGLER/VELIOV 03] Feichtinger, G.; Tragler, G.; Veliov, V. M.: *Optimality conditions for age-structured control systems*. J. Math. Anal. Appl. **288** (2003), 47 – 68
 23. [FOURER/GAY/KERNIGHAN 02] Fourer, R.; Gay, D. M.; Kernighan, B. W.: *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*. Duxbury Press / Brooks/Cole; 2002, 2. Aufl.
 24. [FRANEK 07A] Franek, L.: *Anwendung optimaler Steuerungsprobleme mit L^∞ -Steuerbeschränkung auf ein Modellproblem der Bildverarbeitung*. Diplomarbeit; WWU Münster 2007
 25. [FRANEK 07B] Franek, M.: *Bildentrauschung und Kantenerkennung mit L^p -Regularisierung und Gradientenbeschränkung bei Graustufenbildern*. Diplomarbeit; WWU Münster 2007
 26. [FUNK 62] Funk, P.: *Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik*. Springer; Berlin - Göttingen - Heidelberg 1962 (Grundlehren 94)
 27. [GAJEWSKI/GRÖGER/ZACHARIAS 74] Gajewski, H.; Gröger, K.; Zacharias, K.: *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. Akademie-Verlag; Berlin 1974
 28. [GOERING/ROOS/TOBISKA 93] Goering, H.; Roos, H.-G.; Tobiska, L.: *Finite-Element-Methode*. Akademie-Verlag; Berlin 1993, 3. Aufl.
 29. [GOUSSEAU/MOREL 01] Gousseau, Y.; Morel, J.-M.: *Are natural images of bounded variation?* SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 634 – 648
 30. [HABER/MODERSITZKI 07] Haber, E.; Modersitzki, J.: *Intensity gradient based registration and fusion of multi-modal images*. Methods of Information in Medicine **46** (2007), 292 – 299

-
31. [HINTERBERGER/HINTERMÜLLER/KUNISCH/OEHSEN/SCHERZER 03] Hinterberger, W.; Hintermüller, M.; Kunisch, K.; von Oehsen, M.; Scherzer, O.: *Tube methods for BV regularization*. J. Math. Imaging Vision **19** (2003), 219 – 235
32. [LAIRD/WÄCHTER 07] Laird, C.; Wächter, A.: *Introduction to IPOPT: A tutorial for downloading, installing, and using IPOPT. Revision No. 1024*. Elektronisch veröffentlicht unter <http://www.coin-or.org/Ipopt/documentation/> (Zugriff am 29. 01. 2008)
33. [LUR'E 75] Lur'e, K. A. (Лурье, К. А.): *Оптимальное управление в задачах математической физики*. Наука; Москва 1975
34. [MAESS 88] Maess, G.: *Vorlesungen über numerische Mathematik II*. Akademie-Verlag; Berlin 1988
35. [OSHER/BURGER/GOLDFARB/XU/YIN 05] Osher, S.; Burger, M.; Goldfarb, D.; Xu, J.; Yin, W.: *An iterative regularization method for total variation-based image restoration*. Multiscale Model. Simul. **4** (2005), 460 – 489
36. [PICKENHAIN/WAGNER 00] Pickenhain, S.; Wagner, M.: *Critical points in relaxed deposit problems*. In: Ioffe, A.; Reich, S.; Shafir, I. (Hrsg.): *Calculus of Variations and Optimal Control*, Technion 98, Vol. II (Research Notes in Mathematics, Vol. 411). Chapman & Hall / CRC Press; Boca Raton etc. 2000, 217 – 236
37. [RUDIN/OSHER/FATEMI 92] Rudin, L. I.; Osher, S.; Fatemi, E.: *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*. Physica D **60** (1992), 259 – 268
38. [TING 69A] Ting, T. W.: *Elastic-plastic torsion of convex cylindrical bars*. J. Math. Mech. **19** (1969), 531 – 551
39. [TING 69B] Ting, T. W.: *Elastic-plastic torsion problem III*. Arch. Rat. Mech. Anal. **34** (1969), 228 – 244
40. [TRÖLTZSCH 05] Tröltzsch, F.: *Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen — Theorie, Verfahren und Anwendungen*. Vieweg; Wiesbaden 2005
41. [WÄCHTER/BIEGLER 06] Wächter, A.; Biegler, L. T.: *On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming*. Math. Program., Ser. A **106** (2006), 25 – 57
42. [WAGNER 96] Wagner, M.: *Erweiterungen des mehrdimensionalen Pontryaginschen Maximumprinzips auf meßbare und beschränkte sowie distributionelle Steuerungen*. Dissertation. Universität Leipzig 1996
43. [WAGNER 99] Wagner, M.: *Erweiterungen eines Satzes von F. Hüseinov über die C^∞ -Approximation von Lipschitzfunktionen*. BTU Cottbus, Preprint M-11/1999.
44. [WAGNER 03] Wagner, M.: *Variationsrechnung*. Vorlesung und Seminar an der BTU Cottbus im Herbstsemester 2003/04
45. [WAGNER 06] Wagner, M.: *Mehrdimensionale Steuerungsprobleme mit quasikonvexen Integranden*. Habilitationsschrift, BTU Cottbus 2006
46. [WAGNER 07] Wagner, M.: *Pontryagin's maximum principle for multidimensional control problems in image processing*. BTU Cottbus, Preprint-Reihe Mathematik, Preprint Nr. M-10/2007. Accepted for publication: J. Optim. Theory Appl.
47. [WEICKERT 96] Weickert, J.: *Anisotropic diffusion in image processing*. Dissertation; Universität Kaiserslautern 1996

Zuletzt geändert: 14. 07. 2008

Anschriften / e-mail: *Lucas Franek:* Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Einsteinstr. 62, D-48149 Münster. e-mail: lfran_01@uni-muenster.de

Marzena Franek: Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Einsteinstr. 62, D-48149 Münster. e-mail: marzena.franek@math.uni-muenster.de

Helmut Maurer: Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Einsteinstr. 62, D-48149 Münster. e-mail: maurer@math.uni-muenster.de

Marcus Wagner: BTU Cottbus, Mathematisches Institut, Postfach 10 13 44, D-03013 Cottbus.
Homepage / e-mail: www.thecitytoCome.de / wagner@math.tu-cottbus.de