Übungen zur Vorlesung Höhere Numerik

Übungsblatt 9, Abgabe: Freitag, 18.12.09, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Gegeben sei $p \in C^1(I), f \in C^1(I)$ auf dem Intervall $I = [a,b]$. Zeigen Sie, dass für $p(s) > 0,\ \forall s \in I$ die Lösung von $(px')' = f$ auf I durch folgende Integralform

$$x(s) = \int_a^b k(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma + g(s)$$

gegeben ist, wobei k einen symmetrischen und nichtpositiven Kern darstellt.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Wir betrachten die Diskretisierung

$$(px')' \approx D_-(pD_+x).$$

Berechnen Sie die Konsistenzordnung dieser Diskretisierung.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Überprüfen Sie das Maximumprinzip an der Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) = -u_{xx} - u_{yy} &= f(x,y) && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 18.12.09, 10.00 Uhr)
Schreiben Sie ein Programm zur Lösung der Randwertaufgabe

$$(px')' = f, \text{ mit } x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta$$

auf dem Intervall $I = [a,b]$ mit Hilfe von Differenzenverfahren. Betrachten Sie die Gitterweite $h = (b-a)/(n+1)$ und stellen Sie das lineare Gleichungssystem $K_h x_h = f_h$ mit der Matrix $K_h \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und den Vektoren $x_h = (x_1, ..., x_n), f_h = (f_1, ..., f_n) \in \mathbb{R}^n$ auf.
Testen Sie Ihr Programm an der Aufgabe $-x'' = \sin(x)$ mit $p = -1$ und $f = \sin(x)$ auf dem Intervall $I = [0, \pi/2]$. Betrachten Sie die Randbedingungen $x(0) = 1,\ x(\pi/2) = 0$ und die unterschiedlichen Gitterweiten $h = 1$, $h = 0.1$ und $h = 0.01$.