

# Wechselkurse und Finanzmarkt-Indizes

Jan Michael Schulte

8. Mai 2008



# Inhaltsverzeichnis

- 1 Wechselkurse
  - Einführung
  - Wechselkurs US Dollar - Deutsche Mark
  - Statistischer Prozess
- 2 Verstärkendes multiplikatives Rauschen
  - Reinjektion
  - Eigenschaften der Fluktuationen von  $\Delta x(\tau)$
- 3 Dynamik der Finanzmärkte
  - Diffusion auf Finanzmärkten
  - Herleitung einer Verteilungs-Funktion
  - Anwendung auf einen Markt-Index
- 4 Nachfrageüberhang
  - Erweiterung des Modells
  - Power-Law Verhalten
  - Entwicklung in der Zeit

# Motivation

- Wahrscheinlichkeitsdichten von Marktdynamiken zeigen *Power Law* Verhalten und haben *Fat Tails*.  
  
→ unerwartet hohe Wahrscheinlichkeiten für große Preisänderungen auf kurzen Zeitintervallen

# Empirische Daten

- Beschreibung der Eigenschaften von Energie-Kaskaden durch eine Fokker-Planck Gleichung (FPE)
- Vermutung: Dynamik der Wechselkurse verschiedener Währungen kann ebenfalls durch eine FPE beschrieben werden
- Empirische Untersuchung: Set von fast 1.500.000 Zeitpunkten aus den Jahren 1992 und 1993 über den Wechselkurs US Dollar - Deutsche Mark

# Empirische Daten

- Beschreibung der Eigenschaften von Energie-Kaskaden durch eine Fokker-Planck Gleichung (FPE)
- Vermutung: Dynamik der Wechselkurse verschiedener Währungen kann ebenfalls durch eine FPE beschrieben werden
- Empirische Untersuchung: Set von fast 1.500.000 Zeitpunkten aus den Jahren 1992 und 1993 über den Wechselkurs US Dollar - Deutsche Mark

Untersucht wird zunächst die statistische Abhängigkeit von Preisänderungen  $\Delta x_i := x(t + \Delta t_i) - x(t)$  über die Zeit  $\Delta t_i$ .

# Empirische Daten

- Beschreibung der Eigenschaften von Energie-Kaskaden durch eine Fokker-Planck Gleichung (FPE)
- Vermutung: Dynamik der Wechselkurse verschiedener Währungen kann ebenfalls durch eine FPE beschrieben werden
- Empirische Untersuchung: Set von fast 1.500.000 Zeitpunkten aus den Jahren 1992 und 1993 über den Wechselkurs US Dollar - Deutsche Mark

Untersucht wird zunächst die statistische Abhängigkeit von Preisänderungen  $\Delta x_i := x(t + \Delta t_i) - x(t)$  über die Zeit  $\Delta t_i$ .

# Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF)

Gewinnung der PDF

$$p(\Delta x_2, \Delta t_2; \Delta x_1, \Delta t_1)$$

für  $\Delta t_2 < \Delta t_1$  aus dem Datenset.

→ Falls  $\Delta x_1, \Delta x_2$  **statistisch unabhängig** sind, faktorisiert die PDF in

$$p(\Delta x_2, \Delta t_2; \Delta x_1, \Delta t_1) = p(\Delta x_2, \Delta t_2)p(\Delta x_1, \Delta t_1)$$

# Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF)

Gewinnung der PDF

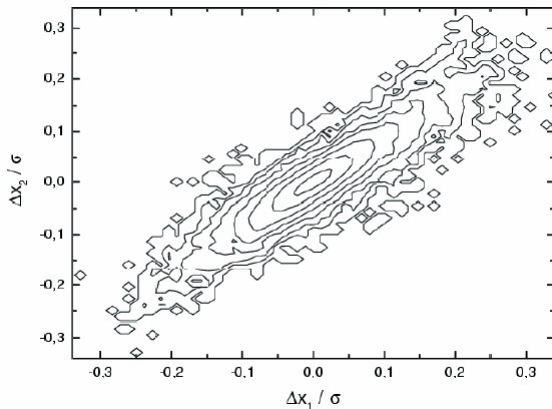
$$p(\Delta x_2, \Delta t_2; \Delta x_1, \Delta t_1)$$

für  $\Delta t_2 < \Delta t_1$  aus dem Datenset.

→ Falls  $\Delta x_1, \Delta x_2$  **statistisch unabhängig** sind, faktorisiert die PDF in

$$p(\Delta x_2, \Delta t_2; \Delta x_1, \Delta t_1) = p(\Delta x_2, \Delta t_2)p(\Delta x_1, \Delta t_1)$$

## Grafik PDF



$$\Delta t_1 = 6168s$$

$$\Delta t_2 = 5120s$$

# Erweiterung der PDF

- Was für ein statistischer Prozess unterliegt den Preisänderungen?
- Allgemeiner Ansatz: Evaluation von zusammengesetzten PDFs  $p^N(\Delta x_1, \Delta t_1; \dots; \Delta x_N, \Delta t_N)$
- Falls Markov-Prozess:  $p^N$  wird als Produkt von  $p(\Delta x_{i+1}, \Delta t_{i+1} | \Delta x_i, \Delta t_i), i = 1, \dots, N - 1$  generiert

# Erweiterung der PDF

- Was für ein statistischer Prozess unterliegt den Preisänderungen?
- Allgemeiner Ansatz: Evaluation von zusammengesetzten PDFs  $p^N(\Delta x_1, \Delta t_1; \dots; \Delta x_N, \Delta t_N)$
- Falls Markov-Prozess:  $p^N$  wird als Produkt von  $p(\Delta x_{i+1}, \Delta t_{i+1} | \Delta x_i, \Delta t_i), i = 1, \dots, N - 1$  generiert

# Chapman-Kolmogorov Gleichung

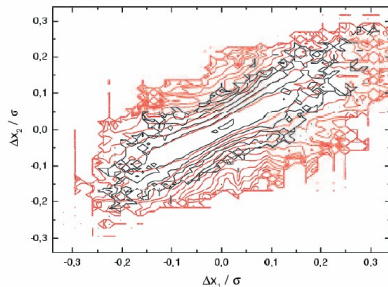
Notwendige Bedingung:

$$p(\Delta x_2, \Delta t_2 | \Delta x_1, \Delta t_1)$$

$$= \int \int p(\Delta x_2, \Delta t_2 | \Delta x_i, \Delta t_i) p(\Delta x_i, \Delta t_i | \Delta x_1, \Delta t_1) d(\Delta x_i) d(\Delta t_i)$$

sollte für jeden Wert  $\Delta t_i$  im Intervall  $\Delta t_2 < \Delta t_i < \Delta t_1$  gelten.

# Überprüfung von Chapman-Kolmogorov



**schwarz:**

direkt evaluierte Verteilung

**rot:**

kalkulierte Verteilung nach  
Chapman-Kolmogorov

## von Chapman-Kolmogorov zu FPE

Für  $\tau = -\ln \Delta t$  gilt:  $\Delta t \rightarrow 0 \iff \tau \rightarrow \infty$

Aus Chapman-Kolmogorov wird in Differentialform eine Mastergleichung, die die Form einer FPE annehmen kann:

$$\frac{d}{d\tau} p(\Delta x, \tau) = \left[ -\frac{\partial}{\partial \Delta x} D^1(\Delta x, \tau) + \frac{\partial^2}{\partial \Delta x^2} D^2(\Delta x, \tau) \right] p(\Delta x, \tau)$$

## von Chapman-Kolmogorov zu FPE

Für  $\tau = -\ln \Delta t$  gilt:  $\Delta t \rightarrow 0 \iff \tau \rightarrow \infty$

Aus Chapman-Kolmogorov wird in Differentialform eine Mastergleichung, die die Form einer FPE annehmen kann:

$$\frac{d}{d\tau} p(\Delta x, \tau) = \left[ -\frac{\partial}{\partial \Delta x} D^1(\Delta x, \tau) + \frac{\partial^2}{\partial \Delta x^2} D^2(\Delta x, \tau) \right] p(\Delta x, \tau)$$

# Drift und Diffusion

Die Drift- und Diffusions-Koeffizienten können direkt aus den Daten ermittelt werden:

$$D^{(k)}(\Delta x, \tau) = \frac{1}{k!} \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} M^{(k)}$$

$$M^{(k)} = \frac{1}{\Delta \tau} \int (\Delta x' - \Delta x)^k p(\Delta x', \tau + \Delta \tau | \Delta x, \tau) d\Delta x'$$

# Drift und Diffusion

Durch genaue Analyse der Daten ergibt sich:

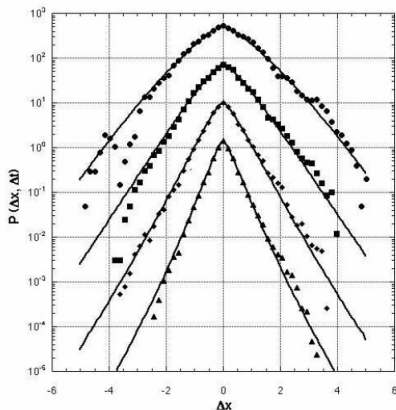
$$D^{(1)} = -0.44\Delta x$$

$$D^{(2)} = 0.003\exp(-\tau/2) + 0.019(\Delta x + 0.04)^2$$

(bei  $\Delta t = 40960s$ )

Hiermit kann nun die FPE gelöst werden.

## Lösung der FPE



Wahrscheinlichkeitsdichten für  
 $\Delta t = 5120, 10240, 20480, 40960s$   
(von unten nach oben)

# Fokker-Planck und Langevin Gleichung

Die FPE ist äquivalent zu einer Langevin Gleichung der Form

$$d\Delta x(\tau) = D^{(1)}(\Delta x(\tau))d\tau + \sqrt{D^{(2)}(\Delta x(\tau), \tau)}dW$$

mit den Kramers-Moyal Koeffizienten

$$D^{(1)}(\Delta x) = -0.44\Delta x$$

$$D^{(2)}(\Delta x, \tau) = 0.003 \exp(-\tau/2) + 0.019(\Delta x + 0.04)^2$$

## multiplikatives und additives Rauschen

Für großes  $\Delta x$ :

$$\sqrt{D^{(2)}(\Delta x, \tau)} \rightarrow \sqrt{0.019} \Delta x \text{ (multiplikatives Rauschen)}$$

und für kleines  $\Delta x$ :

$\sqrt{D^{(2)}(\Delta x, \tau)}$  konvergiert gegen eine von  $\Delta x$  unabhängige Funktion (additives Rauschen)

→ führt zu multiplikativem Rauschen mit Reinjektion

→ generiert *Power Law* Verteilung mit *Fat Tails*

## Eigenschaften der Fluktuationen von $\Delta x(\tau)$

approximierte Langevin Gleichung:

$$\Delta x(\tau + d\tau) = \Delta x(\tau) + D^{(1)}(\Delta x(\tau), \tau)d\tau + \sqrt{D^{(2)}(\Delta x(\tau), \tau)}dW$$

Man erhält (für kleines  $d\tau$ ) :

$$\Delta x(\tau + d\tau) = a(\tau)\Delta x(\tau)$$

für großes  $\Delta x$  mit  $a(\tau) = 1 - 0.44d\tau + \sqrt{0.019}dW$

und

$$\Delta x(\tau + d\tau) = a_0(\tau)\Delta x(\tau) + \sigma dW$$

für kleines  $\Delta x$  mit  $a_0 = 1 - 0.44d\tau$  und

$$\sigma = \sqrt{0.003e^{-\tau/2} + 0.019(0.04)^2}$$

## Eigenschaften der Fluktuationen von $\Delta x(\tau)$

approximierte Langevin Gleichung:

$$\Delta x(\tau + d\tau) = \Delta x(\tau) + D^{(1)}(\Delta x(\tau), \tau)d\tau + \sqrt{D^{(2)}(\Delta x(\tau), \tau)}dW$$

Man erhält (für kleines  $d\tau$ ) :

$$\Delta x(\tau + d\tau) = a(\tau)\Delta x(\tau)$$

für großes  $\Delta x$  mit  $a(\tau) = 1 - 0.44d\tau + \sqrt{0.019}dW$

und

$$\Delta x(\tau + d\tau) = a_0(\tau)\Delta x(\tau) + \sigma dW$$

für kleines  $\Delta x$  mit  $a_0 = 1 - 0.44d\tau$  und

$$\sigma = \sqrt{0.003e^{-\tau/2} + 0.019(0.04)^2}$$

## Generierung des Power Law Tail

- Zeitschritte  $d\tau$
- $p_{>}$ : Wahrscheinlichkeit für  $a > 1$
- $a_{>}$ : Durchschnitt der  $a > 1$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Wert  $\Delta x$  der Ordnung  $\Delta x \approx \sigma a_{>}^n$

$$p_{>}^n = \exp(n \ln p_{>}) \approx \exp\left(\ln p_{>} \frac{\ln \frac{\Delta x}{\sigma}}{\ln a_{>}}\right) = \frac{1}{(\Delta x / \sigma)^\mu}$$

mit  $\mu = -\ln p_{>} / \ln a_{>}$  und somit

$$p_{>} a_{>}^\mu = 1$$

## Generierung des Power Law Tail

- Zeitschritte  $d\tau$
- $p_{>}$ : Wahrscheinlichkeit für  $a > 1$
- $a_{>}$ : Durchschnitt der  $a > 1$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Wert  $\Delta x$  der Ordnung  $\Delta x \approx \sigma a_{>}^n$

$$p_{>}^n = \exp(n \ln p_{>}) \approx \exp\left(\ln p_{>} \frac{\ln \frac{\Delta x}{\sigma}}{\ln a_{>}}\right) = \frac{1}{(\Delta x / \sigma)^\mu}$$

mit  $\mu = -\ln p_{>} / \ln a_{>}$  und somit

$$p_{>} a_{>}^\mu = 1$$

## Generierung des Power Law Tail

Bestimmung des Exponenten  $\mu$  der Power Law Verteilung von  $\Delta x$

$$P(\Delta x) \sim \Delta x^{-(1+\mu)}$$

als

$$\mu = -\frac{\langle \ln a \rangle}{\langle (\ln a)^2 \rangle - \langle \ln a \rangle^2} \approx 11.6$$

## Gründe für Abweichung

Literatur gibt den Wert für Finanzmärkte im Bereich 3 - 5 an.

Mögliche Gründe für die starke Abweichung:

- Wechselkurse zeigen dünnere Tails als Wertpapiere
- Parameter der Verteilung des Fokker-Planck Verfahrens nicht exakt
- Beschreibung durch Power Laws nicht adäquat

# Anomalous Diffusion

Systeme mit ungewöhnlicher Diffusion:

- Plasma Fluss
- Surface Growth
- **Finanzmärkte**
- ...

# Anomalous Diffusion

*power law* - Skalierung:

$t^\alpha$

$\alpha > 1$  (Super-Diffusion)

$\alpha < 1$  (Sub-Diffusion)

$\alpha = 1$  (Normal-Diffusion)

# Diffusion auf Finanzmärkten

- Varianz der Preisänderung unterliegt ungewöhnlicher (Super-) Diffusion
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen dieser Änderungen haben *Power Law Tails*

→ Frage: Wie lässt sich das am besten beschreiben?

# Tsallis-Entropie und FPE

- bekannt: Verbindung Power Law Tails  $\leftrightarrow$  *Tsallis-Entropie*
- Vermutung: Markt-Dynamik kann von einer nicht-linearen FPE kontrolliert werden
- Überprüfung am S&P500 Index

## Tsallis-Entropie

$$S_q = -\frac{1}{1-q} \left( 1 - \int P(x, t)^q dx \right)$$

$$\int P(x, t) dx = 1$$

$$\langle x - \bar{x}(t) \rangle_q \equiv \int [x - \bar{x}(t)] P(x, t)^q dx = 0$$

$$\langle (x - \bar{x}(t))^2 \rangle_q \equiv \int [x - \bar{x}(t)]^2 P(x, t)^q dx = \sigma_q(t)^2$$

## Die Verteilungsfunktion

Maximierung der Tsallis-Entropie unter den NB bei festem  $q$  liefert

$$P(x, t) = \frac{1}{Z(t)} \left\{ 1 + \beta t (q - 1) [x - \bar{x}(t)]^2 \right\}^{-\frac{1}{q-1}}$$

$$Z(t) = \frac{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{(q-1)\beta(t)}}$$

$$\beta(t) = \frac{1}{2\sigma_q(t)^2 Z(t)^{q-1}}$$

## Varianz der Verteilungsfunktion

*Gewöhnliche* Varianz:

$$\sigma^2(t) = \langle (x - \bar{x}(t))^2 \rangle_1 = \begin{cases} \frac{1}{(5-3q)\beta(t)}, & q < \frac{5}{3} \\ \infty, & q \geq \frac{5}{3} \end{cases}$$

⇒ Bedingung für Endlichkeit:

$$1 \leq q < 5/3$$

## Fokker-Planck Gleichung

Man kann zeigen, dass  $P(x,t)$  die FPE

$$\frac{\partial P(x, t)^\mu}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [F(x)P(x, t)^\mu] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)^\nu}{\partial x^2}$$

löst, solange  $q = 1 + \mu - \nu$  gilt.

## Standard & Poor's 500

- hochfrequente 1-Minute-Interval Daten von Juli 2000 bis Januar 2001

## Standard & Poor's 500

- hochfrequente 1-Minute-Interval Daten von Juli 2000 bis Januar 2001
- Preise  $p(\tau)$  zu diskreten Zeiten  $\tau$  ( $\tau = 1, 2, \dots, 50.000$  Handel-Minuten)

## Standard & Poor's 500

- hochfrequente 1-Minute-Interval Daten von Juli 2000 bis Januar 2001
- Preise  $p(\tau)$  zu diskreten Zeiten  $\tau$  ( $\tau = 1, 2, \dots, 50.000$  Handel-Minuten)
- $x :=$  Preisänderung während eines Zeitintervalls  $t$

## Standard & Poor's 500

- hochfrequente 1-Minute-Interval Daten von Juli 2000 bis Januar 2001
- Preise  $p(\tau)$  zu diskreten Zeiten  $\tau$  ( $\tau = 1, 2, \dots, 50.000$  Handel-Minuten)
- $x :=$  Preisänderung während eines Zeitintervalls  $t$
- Sequenz von nicht-überlappenden Preisänderungen  $\{x_1, x_2, \dots\}$  mit  $x_j = p(jt + 1) - p((j - 1)t + 1)$

## Standard & Poor's 500

- hochfrequente 1-Minute-Interval Daten von Juli 2000 bis Januar 2001
- Preise  $p(\tau)$  zu diskreten Zeiten  $\tau$  ( $\tau = 1, 2, \dots, 50.000$  Handel-Minuten)
- $x :=$  Preisänderung während eines Zeitintervalls  $t$
- Sequenz von nicht-überlappenden Preisänderungen  $\{x_1, x_2, \dots\}$  mit  $x_j = p(jt + 1) - p((j - 1)t + 1)$

## Bedingte Wahrscheinlichkeit und Korrelation

Ungewöhnliche Diffusion  $\rightarrow$  Preisänderungen in aufeinanderfolgenden Intervallen sind **nicht** unabhängig:

$$P(x, t_1 + t_2) = \int P(x - x_1, t_2 | x_1, t_1) P(x_1, t_1) dx_1$$

Starke Korrelation für kurze Zeitintervalle (wenige Minuten)

$\Rightarrow$  Konzentration auf den *intra-day* Markt ( $1\text{min} \leq t \leq 60\text{min}$ )

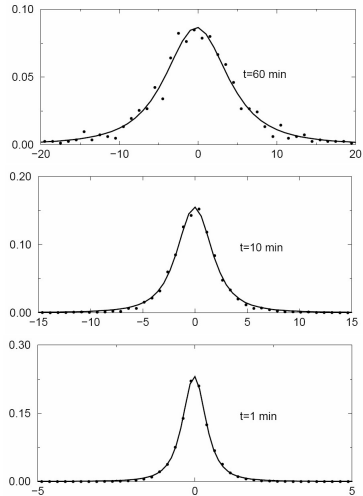
# Verteilung der Preisänderungen

Für  $t_0 = 1$  Minute:

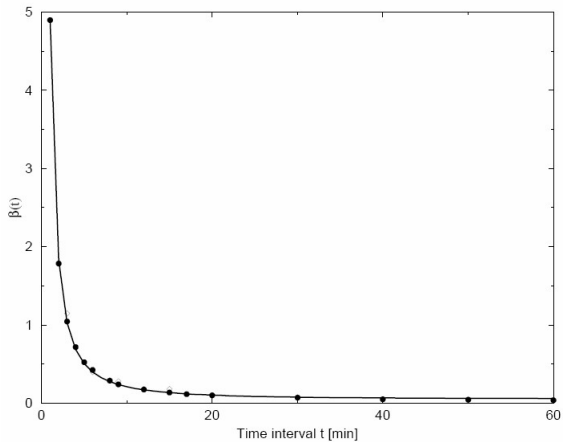
- $q = 1.64 \pm 0.02$
- $\beta(t) = 4.90 \pm 0.11$
- $Z(t_0) = 1.09 \pm 0.02$

→ Anpassung der Parameter an verschiedene Zeitintervalle  $t$  bei festem  $q$

# Verteilung der Preisänderungen



$\beta(t)$



## Erweiterung des Modells

Nachfrageüberhang  $\Phi(t) := N_+(t) - N_-(t)$

mit

$N_+(t)$  : Anzahl der Käufer

$N_-(t)$  : Anzahl der Verkäufer

ist proportional zum momentanen Preis:

$$x(t) = \frac{\Phi(t)}{\lambda} = \frac{N_+(t) - N_-(t)}{\lambda}$$

wobei

$\lambda :=$  Markttiefe

## Mittelwerte und Varianzen

$$\langle S \rangle_q = S_q = -\frac{1}{1-q} \left( 1 - \sum_{N_+, N_- = 0}^N P(N_+, N_-, t)^q \right)$$

$$\langle (N_+ - \bar{N}_+) \rangle_q = 0 = \sum_{N_+, N_- = 0}^N (N_+ - \bar{N}_+) P(N_+, N_-, t)^q$$

$$\langle (N_+ - \bar{N}_+)^2 \rangle_q = \sum_{N_+, N_- = 0}^N (N_+ - \bar{N}_+)^2 P(N_+, N_-, t)^q = \eta_+^2(t)_q$$

$$\langle (N_- - \bar{N}_-) \rangle_q = 0 = \sum_{N_+, N_- = 0}^N (N_- - \bar{N}_-) P(N_+, N_-, t)^q$$

$$\langle (N_- - \bar{N}_-)^2 \rangle_q = \sum_{N_+, N_- = 0}^N (N_- - \bar{N}_-)^2 P(N_+, N_-, t)^q = \eta_-^2(t)_q$$

## Mittelwerte und Varianzen

$$\langle S \rangle_q = S_q = -\frac{1}{1-q} \left( 1 - \sum_{N_+, N_- = 0}^N P(N_+, N_-, t)^q \right)$$

$$\langle (N_+ - \bar{N}_+) \rangle_q = 0 = \sum_{N_+, N_- = 0}^N (N_+ - \bar{N}_+) P(N_+, N_-, t)^q$$

$$\langle (N_+ - \bar{N}_+)^2 \rangle_q = \sum_{N_+, N_- = 0}^N (N_+ - \bar{N}_+)^2 P(N_+, N_-, t)^q = \eta_+^2(t)_q$$

$$\langle (N_- - \bar{N}_-) \rangle_q = 0 = \sum_{N_+, N_- = 0}^N (N_- - \bar{N}_-) P(N_+, N_-, t)^q$$

$$\langle (N_- - \bar{N}_-)^2 \rangle_q = \sum_{N_+, N_- = 0}^N (N_- - \bar{N}_-)^2 P(N_+, N_-, t)^q = \eta_-^2(t)_q$$

# Die Verteilungsfunktion

Unter Berücksichtigung der Normierungsbedingung

$1 = \sum_{N_+, N_- = 0}^N P(N_+, N_-, t)$  führt Maximierung der Entropie nun auf

$$P(N_+, N_-, t) = \frac{(1+(q-1)\beta(t)[(N_+ - \bar{N}_+)^2 + (N_- - \bar{N}_-)^2])^{-\frac{1}{q-1}}}{Z_q}$$

## Symmetrisierung/Vereinfachung

Definiere  $n_{\pm} = N_{\pm} - \frac{N}{2}$  mit  $-\frac{N}{2} \leq n_{\pm} \leq \frac{N}{2}$

$$\Rightarrow \phi = n_+ - n_-$$

Betrachte  $N \rightarrow \infty$

$\Rightarrow P(n_+, n_-, t)$  ist nun symmetrisch und kontinuierlich:

$$P(n_+, n_-, t) = \frac{(1 + (q - 1)\beta(t) [(n_+ - \bar{n}_+)^2 + (n_- - \bar{n}_-)^2])^{\frac{-1}{q-1}}}{Z_q}$$

## Symmetrisierung/Vereinfachung

Definiere  $n_{\pm} = N_{\pm} - \frac{N}{2}$  mit  $-\frac{N}{2} \leq n_{\pm} \leq \frac{N}{2}$

$$\Rightarrow \phi = n_+ - n_-$$

Betrachte  $N \rightarrow \infty$

$\Rightarrow P(n_+, n_-, t)$  ist nun symmetrisch und kontinuierlich:

$$P(n_+, n_-, t) = \frac{(1 + (q - 1)\beta(t) [(n_+ - \bar{n}_+)^2 + (n_- - \bar{n}_-)^2])^{-\frac{1}{q-1}}}{Z_q}$$

## Fokker-Planck Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(n_+, n_-, t) &= -\frac{\partial}{\partial n_+} [\alpha(n_+) P(n_+, n_-, t)] - \frac{\partial}{\partial n_-} [\alpha(n_-) P(n_+, n_-, t)] \\ &\quad + \frac{D}{2} \left( \frac{\partial}{\partial n_+^2} + \frac{\partial}{\partial n_-^2} \right) [P^{2-q}(n_+, n_-, t)] \end{aligned}$$

führt zu den Stochastischen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} dn_+ &= \alpha(n_+) dt + \sqrt{DP^{1-q}(n_+, n_-, t)} dW_+(t) \\ dn_- &= \alpha(n_-) dt + \sqrt{DP^{1-q}(n_+, n_-, t)} dW_-(t) \end{aligned}$$

## Fokker-Planck Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(n_+, n_-, t) &= -\frac{\partial}{\partial n_+} [\alpha(n_+) P(n_+, n_-, t)] - \frac{\partial}{\partial n_-} [\alpha(n_-) P(n_+, n_-, t)] \\ &\quad + \frac{D}{2} \left( \frac{\partial}{\partial n_+^2} + \frac{\partial}{\partial n_-^2} \right) [P^{2-q}(n_+, n_-, t)] \end{aligned}$$

führt zu den Stochastischen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} dn_+ &= \alpha(n_+) dt + \sqrt{DP^{1-q}(n_+, n_-, t)} dW_+(t) \\ dn_- &= \alpha(n_-) dt + \sqrt{DP^{1-q}(n_+, n_-, t)} dW_-(t) \end{aligned}$$

## Lösung der SDEs

Zusammenhang  $d\Phi = dn_+ - dn_- = \lambda dx(t)$   
und Lösung der SDEs

$$n_{\pm}(t) = n_{\pm}(t_0) \exp^{a_{\pm}(t-t_0)} + \int_{t_0}^t \exp^{a_{\pm}(t-t')} \sqrt{DP^{1-q}(n_+, n_-, t)} dt'$$

liefert gewünschtes Resultat für den momentanen  
Nachfrageüberhang  $\Phi(t)$  bzw. Preis  $x(t)$

$$\Phi(t) = n_+(t) - n_-(t) = \lambda x(t)$$

Ende

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!