Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 9, Abgabe bis 25.06.2008, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Rückwärtsdiffusion, Stabilität*
   Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= D\, u_{xx} \ , \qquad x \in (0,1) \ , \qquad t > 0 \ , \qquad D \in \mathbb{R} \ , \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ , \\ u(x,0) &= u_0(x) \ , \qquad u_0 \in L_2(0,1) \ . \end{aligned}$$

   (a) Lösen Sie die Gleichung für $D = 1$ (Vorwärtsdiffusion) und $D = -1$ (Rückwärtsdiffusion) durch Separation der Variablen $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$.
   Hinweis: Entwickeln Sie den Operator ∂_x^2 mit den Neumann-Randbedingungen nach den Eigenfunktionen $\varphi_k(x)$. Benutzen Sie dann die Darstellung in der Eigenfunktionenbasis

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k(t) \varphi_k(x) \ ,$$

   um die α_k zu finden. Beachten Sie dabei, dass eine periodische Funktion f mit einer Periode $T > 0$ eine Fourierreihenentwicklung besitzt, wenn die Funktion f, auf eine Periode $[c, c+T]$ eingeschränkt, dem Funktionenraum $L_2(c, c+T)$ angehört.

   (b) Interpretieren Sie die beiden Lösungen auf ihre Stabilität.

2. *Diskrete Sprungprozesse - Random Walks, Zustandsänderungen*
   Betrachten Sie wie in der Vorlesung einfache Sprungprozesse auf einem Gitter $h\mathbb{Z}^2$ mit Schrittweite $h > 0$. Nehmen Sie an, dass in einem kleinen Zeitschritt $\tau > 0$ das Teilchen nur einen Gitterpunkt weiter springen darf und dass für die Wahrscheinlichkeiten der Sprünge

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \text{konstant}$$

   gilt. Im Gegensatz zur Vorlesung besitzt das Teilchen nun zwei Zustände A und B. Der Zustand kann sich zwischen zwei Sprüngen mit einer Wahrscheinlichkeit $\xi \in (0,1)$ ändern.

   Leiten Sie die Gleichungen für die Diffusion her.

   Hinweis: Betrachten Sie für jeden Zustand eine eigene Wahrscheinlichkeitsdichte ρ.