Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 3, Abgabe: Donnerstag, 05.11.09, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
(*Tatort Weihnachtsmarkt:*)
In den frühen Morgenstunden des 3.Advents wird hinter einem Glühweinstand auf dem Weihnachtsmarkt eine Leiche gefunden. Da der Rechtsmediziner Boerne aus Münster immer noch krank ist, muss Kommissar Thiel den Todeszeitpunkt des Mordopfers allein bestimmen. Er erinnert sich daran, dass nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz die Abkühlung eines Körpers (negative Temperaturänderung pro Zeit) proportional zur Differenz von Körpertemperatur und Umgebungstemperatur ist. Daher misst er die Temperatur des Opfers um 6:13 Uhr, sie beträgt 22°C. Leider kennt Thiel die Proportionalitätskonstante nicht. Daher misst er um 6:43 die Temperatur des Opfers erneut. Sie beträgt nun 20°C. Die Außentemperatur beträgt 2°C und kann als konstant angenommen werden. Die Körpertemperatur zum Todeszeitpunkt wird mit gesunden 37°C angenommen. Helfen Sie Kommissar Thiel:

(a) Zu welcher Uhrzeit wurde der Mord verübt?

(b) Skalieren Sie das Modell und führen Sie eine Sensitivitätsanalyse für die Mordzeit bezüglich der Körpertemperatur zum Mordzeitpunkt durch, um den Zeitraum, in dem Alibis benötigt werden, genau eingrenzen zu können.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
(*Tatort Weihnachtsmarkt 2.Teil:*)
Unter den Fingernägeln der Leiche findet Kommissar Thiel Hautfetzen des mutmaßlichen Täters. Für einen DNA-Abgleich wird die gefundene DNA-Spur mithilfe modernster Technik vervielfacht. Eine DNA-Replikation wird durch $A + B = 2A$ beschrieben, wobei A die DNA und B das Nukleotid ist.

(a) Stellen Sie das Modell für die DNA-Replikation auf.

(b) Skalieren Sie das Modell und führen Sie eine Sensitivitätsanalyse für k_+ durch.

(c) Diskutieren Sie das Gleichgewicht.

(d) Führen Sie eine lineare Stabilitätsanalyse durch.

(e) Wer ist der Mörder?

Aufgabe 3: (4 Punkte)
(*schwache Lösung:*)
Zeigen Sie, dass die Dichte

$$q(x, y, z, t) = \delta(x - X(t))\delta(y - Y(t))\delta(z - Z(t))$$

eine schwache Lösung von

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\left(\tilde{k}_+ xy - \tilde{k}_- z \right) q(1, 1, -1)^T \right)$$

ist, wobei $\nabla \cdot$ die Divergenz bezeichnet. Die Dirac-δ-Distribution ist dabei definiert durch

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x - a)\varphi(x) dx = \varphi(a) \quad \forall \varphi \in C(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R},$$

und das Tripel $(X(t), Y(t), Z(t))$ durch das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt}(t) &= -\tilde{k}_+ X(t)Y(t) + \tilde{k}_- Z(t) \\ \frac{dY}{dt}(t) &= -\tilde{k}_+ X(t)Y(t) + \tilde{k}_- Z(t) \\ \frac{dZ}{dt}(t) &= \tilde{k}_+ X(t)Y(t) - \tilde{k}_- Z(t). \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
(*Gleichgewichtsgleichung:*)
Das Gleichgewicht des folgenden Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{X}}{dt}(t) &= -\tilde{k}_+ \bar{X}(t)\bar{Y}(t) + \frac{1}{2}\tilde{k}_- \bar{Z}(t) \\ \frac{d\bar{Y}}{dt}(t) &= -\tilde{k}_+ \bar{X}(t)\bar{Y}(t) + \frac{1}{2}\tilde{k}_- \bar{Z}(t) \\ \frac{d\bar{Z}}{dt}(t) &= 2\tilde{k}_+ \bar{X}(t)\bar{Y}(t) - \tilde{k}_- \bar{Z}(t). \end{aligned}$$

ist beschrieben durch

$$\tilde{k}_+ \bar{X}_\infty \bar{Y}_\infty = \frac{1}{2}\tilde{k}_- \bar{Z}_\infty.$$

(a) Bestimmen Sie $\bar{X}_\infty, \bar{Y}_\infty$ und $\bar{Z}_\infty$, wobei bei gegebenem Anfangszustand nur Lösungen mit

$$\bar{X}_\infty + \bar{Z}_\infty = \bar{X}(0) + \bar{Z}(0), \quad \bar{Y}_\infty + \bar{Z}_\infty = \bar{Y}(0) + \bar{Z}(0)$$

betrachtet werden.

(b) Führen Sie eine lineare Stabilitätsanalyse durch.