Prof. Dr. M. Burger, Dipl.-Math. Marzena Franek WS 09/10

# Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

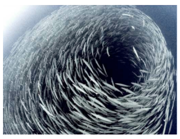
Übungsblatt 4, Abgabe: Donnerstag, 12.11.09, 10.00 Uhr

---

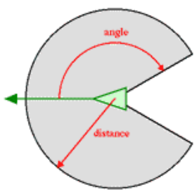
**Aufgabe 1:** (4 Punkte)
*Schwärme(n) für die Mathematik: Teil 1*
Schwarmsysteme sind eine spezielle Form von Partikelsystemen. Jeder Partikel des Systems ist in der Lage auf ihre Umwelt zu reagieren. Gut erforscht ist das Verhalten vom Heringsschwarm, der von selbst seine Richtung blitzschnell ändern kann, und daher wie ein einziger Organismus wirkt. Dies schütz ihn in gewissen Maße vor Angreifern. Obwohl es keinen Anführer in diesem System gibt, kommt es trotzdem zu koordiniertem Verhalten. Dieses beruht im Wesentlichen auf den Prinzipien der Kollisionsvermeidung, Geschwindigkeits- und Richtungsanpassung und der Gruppenzusammengehörigkeit.
Im Idealfall bewegen sich die Fische in einem Schwarmsystem mit einer bevorzugten Geschwindigkeit in einem bevorzugten Abstand voneinander. Wird der bevorzugte Abstand unter- oder überschritten, neigen die Fische dazu den Idealabstand wieder einzunehmen, d.h. es wirkt eine abstoßende bzw. anziehende Kraft.

a) Modellieren Sie das Schwarmverhalten von N Fischen mit den Newton'schen Bewegungsgleichungen und geben Sie eine mögliche funktionale Form für ein passendes Potential an.

b) Skalieren sie das Modell und leiten sie die Adiabatische Näherung her.

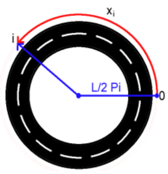


**Aufgabe 2:** (4 Punkte)
*Schwärme(n) für die Mathematik: Teil 2*
In der Natur orientieren sich die Fische nicht an allen Schwarmfischen, sondern nur an denen die sie sehen, d.h. sie haben eine begrenzte Wahrnehmung der Umwelt. Wie im realen Leben hängt der Grad der Beeinflussung von der Entfernung und der Sichtbarkeit anderer Objekte ab.
*Aufgabe:* Erweitern Sie das in Aufgabe 1 entwickelte Modell, indem Sie davon ausgehen, dass jeder Fisch ein begrenztes Sichtfeld bzw. einen begrenzten Sichtwinkel hat. Der Fisch orientiert sich nur an den Nachbarfischen, die in seinem Sichtfeld liegen und passt seine Richtung und Geschwindigkeit diesen Fischen an.



**Aufgabe 3:** (4 Punkte)
*Schwärme(n) für die Mathematik: Programmieraufgabe,* **Abgabe: 26.11.09**
Programmieren Sie das Modell, welches Sie in Aufgabe 1 und 2 entwickelt haben auf einem quadratischen Gebiet.
Hinweis: Gehen Sie von ca. 20 Fischen aus, die jeweils ca. 30 cm lang und 0,2 kg schwer sind. Die Fische sollten zufällig im Gebiet platziert werden. Der bevorzugte Abstand $d_0$ zwischen den Fischen sollte nicht mehr als eine Fischlänge betragen. Wird er unter- oder überschritten, so soll der Fisch seine Schwimmrichtung geeignet ändern um den Idealabstand wieder zu erreichen. Der Sichtwinkel betrage 300 Grad und die Sichtweite 80 cm. Gehen Sie von einer Wunschgeschwindigkeit von 0.3 m/s aus. Betrachten Sie eine geeignete Relaxationszeit $\tau = \frac{1}{10}[s]$.

**Aufgabe 4:** (4 Punkte)
*Verkehrsmodell: Aggressiver Fahrer*
In einem Kreisverkehr der Länge $L$ befinden sich $N$ Fahrzeuge mit der Masse eins. Die Position jedes Fahrzeugs zur Zeit $t$ werde mit $x_i(t)$ bezeichnet, und dessen Geschwindigkeit mit $\dot{x}_i(t) = v_i(t)$ für $i = 1...N$. Da wir uns in einem Kreisverkehr befinden hat das $N$-te Fahrzeug das erste als Vordermann, d.h. es gilt $x_{N+1}(t) = x_1(t) + L$.
Jedes Fahrzeug wird in seinem Brems- und Beschleunigungsverhalten von seinem Vor-




gänger beeinflusst. Die Beschleunigungsgleichung

$$\dot{v}_i(t) = \frac{1}{T}(V(x_{i+1}(t) - x_i(t)) - \dot{x}_i(t)) + a(\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t))F(x_{i+1}(t) - x_i(t))$$

beschreibt einen aggressiven Fahrer, der gerne so schnell fahren möchte, wie sein Vordermann und dabei keinen Sicherabstand einhält. Der erste Term der Summe bedeutet, dass jeder Fahrer für einen gegebenen Abstand $d$ zum Vordermann eine bevorzugte Geschwindigkeit, seine Lieblingsgeschwindigkeit $V(d)$ einhalten möchte. $V$ soll eine monoton steigende Funktion sein mit $V(0) = 0$ und $\lim_{d\to\infty} V(d) = V_{max}$.
Der zweite Term beschreibt die Aggressivität des Fahrers, d.h. je näher der Fahrer dem Vordermann kommt, desto mehr möchte er sich nach der Geschwindigkeit des Vordermanns richten. Die Funktion $T$ modelliert die Reaktionszeit des Fahrers und der Parameter $a \in (0;\infty)$ gewichtet die zwei Verhaltensmuster.

a) Führen Sie eine Entdimensionalisierung des Modells durch.

b) Wie sollte die Funktion $F$ optimalerweise aussehen?