

Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 5, Abgabe: Donnerstag, 10.12.09, 10.00 Uhr

Wir betrachten das Teilchenmodell

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= v_i \\ \dot{v}_i &= F(x_i) + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} G(x_i - x_j)\end{aligned}$$

mit $G(0) = 0$.**Aufgabe 1:** (4 Punkte)*Vlasov-Gleichung:*

Zeigen Sie: Die empirische Dichte

$$f(x, v, t) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(x - x_i) \delta(v - v_i)$$

ist eine schwache Lösung der Vlasov-Gleichung

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F(x) \cdot \nabla_v f + (G * \varphi) \cdot \nabla_v f = 0,$$

mit $\varphi(x, t) = \int f dv$ und $G * \varphi = \int G(x - y) \varphi(y) dy$.

Beachten Sie, dass

$$\sum_{j \neq i} G(x_i - x_j) = \int G(x_i - y) \sum \delta(y - x_j) dx$$

gilt.

Aufgabe 2: (4 Punkte)*Momentenmethode*Sei f eine Lösung der Vlasov-Gleichung mit $f \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ oder $|v| \rightarrow \infty$. Die Dichte, Geschwindigkeit und Energie sind definiert aus den Momenten von f :

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) &:= \int f(x, v, t) dv, \\ U(x, t) &:= \frac{1}{\varphi(x, t)} \int v f(x, v, t) dv, \\ e(x, t) &:= \frac{1}{2} \int |v|^2 f(x, v, t) dv.\end{aligned}$$

- Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung $\partial_t \varphi + \nabla \cdot (\varphi U) = 0$ aus der Vlasov-Gleichung her.
- Leiten Sie in Raumdimension 1 eine Gleichung für U her.

Aufgabe 3: (4 Punkte)*Zwei-Körper-Problem*

Wir wollen die Bewegung eines Planeten der Masse m_P um eine Sonne der Masse m_S beschreiben. Dazu seien $r_P(t)$ und $r_S(t)$ die Positionen von Planeten und Sonne und

$$r(t) = r_P(t) - r_S(t)$$

der Abstand zwischen Sonne und Planeten.

- a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für Sonne und Planeten auf. Berechnen Sie die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \sum_i m_i \frac{|r'_i|^2}{2}$$

und die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j V_{ij}(|r_i - r_j|),$$

wobei V_{ij} eine Stammfunktion von H_{ij} ist, und verifizieren Sie, dass die Gesamtenergie

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$

eine Erhaltungsgröße ist.

- b) Zeigen Sie, dass sich die Bewegung der Erde um die Sonne durch die Gleichung

$$m_P r''(t) = -G_0 m_P m \frac{r(t)}{|r(t)|^3} \quad (1)$$

mit der Gravitationskonstante G_0 und der Gesamtmasse $m = m_S + m_P$ beschreiben lässt.

Aufgabe 4: (4 Punkte)*Kepler'sche Gesetze*

Wir beschreiben mit der Funktion

$$t \mapsto x(t) = x_P(t) - x_S,$$

die Bahn des Planeten relativ zur Sonne und vernachlässigen die Bewegung der Sonne. Die Energie und der Drehimpuls,

$$E = \frac{-G_0 m_P m}{|x|} + \frac{m_P}{2} |x'|^2 \quad \text{bzw.} \quad L = m_P x \times x',$$

sind Erhaltungsgrößen. Mit Hilfe der Polarkoordinaten

$$x = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (2)$$

lässt sich aus den Erhaltungssätzen das folgende System herleiten:

$$r^2 \dot{\varphi} = \frac{|L|}{m_P}, \quad (3)$$

$$(\dot{r})^2 + r^2 (\dot{\varphi})^2 - 2 \frac{G_0 m}{r} = 2 \frac{E}{m_P}. \quad (4)$$

a) Betrachten Sie r als Funktion von φ und zeigen Sie, dass

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad \text{mit} \quad p = \frac{|L|^2}{G_0 m m_P^2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2E|L|^2}{G_0^2 m^2 m_P^3}}$$

den Gleichungen (3) und (4) genügt.

b) Wir betrachten den Fall $e < 1$. Beweisen Sie mit Hilfe der Polarkoordinaten (2) das 1. Kepler'sche Gesetz: Der Planet bewegt sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne. Leiten Sie dazu die Ellipsengleichung

$$\frac{(x_1 + ea)^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

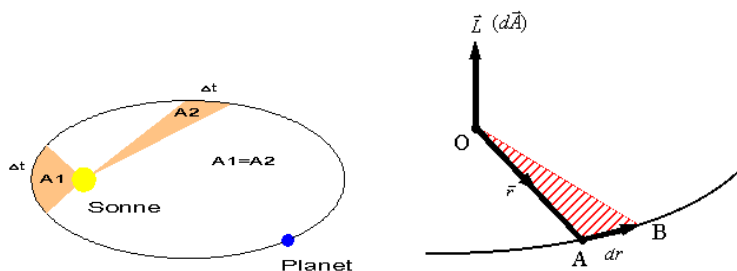
mit geeigneten Konstanten a, b her.

Hinweis: e ist die numerische Exzentrizität, d.h. es gilt $e^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$.

c) Beweisen Sie das 2. Kepler'sche Gesetz:

Der Abstandsvektor x überstreicht in einem gegebenen Zeitintervall Δt stets die gleiche Fläche $A_{\Delta t}$. Nutzen und begründen Sie, dass für $\Delta t = t_2 - t_1$ gilt

$$A_{\Delta t} = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} |x(t) \times x'(t)| dt .$$



Hinweis: Betrachten Sie dafür die Bahn dx des Planeten für eine Zeitgröße dt . Ist dt klein genug, so entspricht die überstrichene Fläche einem Dreieck + einer Fläche, die vernachlässigt werden kann.