

Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 6, Abgabe: Donnerstag, 17.12.09, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)*Liouville-Gleichung:*

Seien $(x_i(0), v_i(0))$ identisch verteilte und unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte $f_D(x, v)$. Zeigen Sie: Die gemeinsame Wahrscheinlichkeits-Dichte $f_N : \mathbb{R}^{6N} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ für die Zufallsvariablen

$$(x_1(t), v_1(t), x_2(t), v_2(t), \dots, x_N(t), v_N(t))$$

erfüllt die Liouville-Gleichung

$$\partial_t f_N + \sum_i v_i \cdot \nabla_{x_i} f_N + \sum_i F(x_i) \cdot \nabla_{v_i} f_N + \frac{1}{N} \sum_i \sum_j G(x_i - x_j) \cdot \nabla_{v_i} f_N = 0.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)*Vlasov-Gleichung*

Betrachten Sie die Vlasov-Gleichung von Blatt 5 Aufgabe 1 mit $G \equiv 0$. Leiten Sie eine Gleichung für das Marginal

$$f(x, v, t) = \int \int \dots \int f(x, x_2, \dots, x_N, v, v_2, \dots, v_N) dx_2 dx_3 \dots dx_N dv_2 dv_3 \dots dv_N$$

her.

Aufgabe 3: (4 Punkte)*Teilchenmodell mit lokaler Abstößung*

Für N Teilchen mit Position x_i , $i = 1, \dots, N$ wird die lokale Abstößung modelliert durch

$$\dot{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} N^{2\beta} \nabla R(N^\beta(x_i - x_j)) + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \nabla A(x_i - x_j).$$

Der erste Term modelliert das lokal abstoßende Verhalten, der zweite das anziehende Verhalten der Teilchen.

Leiten Sie formal einen kontinuierlichen Grenzwert für dieses Modell her, d.h. betrachten Sie $N \rightarrow \infty$, wobei $R \in C^2$.

Hinweis: Betrachten Sie die schwache Formulierung der Vlasov Gleichung und die Taylor-Entwicklung.

Aufgabe 4: (4 Punkte)*Fischschwärme*

Betrachten Sie das Fischschwärme-Modell, welches auf Blatt 4 Aufgabe 1 (ohne eingeschränktes Sichtfeld) hergeleitet wurde. Leiten Sie für das Modell einen kontinuierlichen Grenzwert $N \rightarrow \infty$ her.