Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 7, Abgabe: Donnerstag, 07.01.2010, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
ALLEN-CAHN-Gleichung:
Ein einfaches Modell für die Entmischung zweier Substanzen ist die ALLEN-CAHN Gleichung

$$\partial_t u = \Delta u - W'(u) \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

mit Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T),$$

wobei $u(x, t) \in [0, 1]$ den relativen Anteil der ersten Substanz in der Mischung beschreibt und W' die Ableitung eines Energieterms mit Minima in 0 und 1 (komplett entmischt) und einem Maximum dazwischen beschreibt.
Betrachten Sie das einfache Modell $W(u) = u^2(1 - u)^2$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega u(x, t)dx = \int_\Omega u_0(x)dx$$

gilt und die Energie

$$E(t) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x, t)|^2 + W(u(x, t)) \right) dx$$

in der Zeit monoton nicht-wachsend ist.

b) Führen Sie eine lineare Stabilitätsanalyse für die stationären Lösungen $u_0 = 0,\ u_0 = 1,\ u_0 = \frac{1}{2}$ in einer Raumdimension mit $\Omega = (0, 1)$ durch.
Hinweis: Um die Eigenwerte λ_k des linearisierten Operators

$$Lv = v'' - W''(u_0)v$$

zu berechnen, machen Sie den Ansatz $v_k = cos\ k\pi x$ für die Eigenfunktionen.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
TURING-Instabilität:
Betrachten Sie in $\Omega = (0, 1)$ das System von Reaktions-Diffusions-Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, v)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = d\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(u, v)$$

mit Randbedingungen $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$ auf $\partial\Omega$.
Finden Sie Bedingungen an f und g bzw. an deren Ableitungen, so dass konstante stationäre Lösungen $u_\infty,\ v_\infty$ existieren, die für das Reaktionsproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v)$$

linear stabil, aber für das obige Reaktions-Diffusions-System linear instabil sind.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Modellieren Sie die räumliche Ausbreitung einer grippeähnlichen Krankheit durch Betrachtung folgender Populationen:
Immune, Kranke, Gesunde (aber nicht Immune).

a) Modellieren Sie folgende Effekte:

- Diffusion
- Ansteckung (krank $\rightarrow$ gesund)
- Immunisierung der Kranken
- Immunisierung durch Impfung

b) Führen Sie für Ihre Modelle eine lineare Stabilitätsanalyse durch.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Gestalten Sie Ihre Modelle aus Aufgabe 3 noch realistischer, indem Sie modellieren, dass die Immunisierung eine gewisse Krankheitsdauer voraussetzt und die Ansteckungsgefahr ebenfalls mit der Krankheitsdauer abnimmt. Modellieren Sie dazu die Krankheitsdauer als eine Altersvariable.