Prof. Dr. M. Burger, Dipl.-Math. Marzena Franek WS 09/10

Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 8, Abgabe: Donnerstag, 14.01.2010, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Randschichten:

a) Betrachten Sie ein Randwertproblem der Differentialgleichung

$$\epsilon u'' + u' = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1,$$

mit $\epsilon > 0$. Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung und schauen Sie sich die Randschicht genauer an, indem Sie die Skalierung $y = \frac{x}{\epsilon}$ verwenden.

b) Betrachten Sie in (a) die allgemeinen Randbedingungen

$$u(0) = a, \quad u(1) = b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie a und b so, dass bei der Lösung keine Randschicht auftritt.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Rückwärtsdiffusion, Stabilität:
Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= Du_{xx}, & & x \in (0,1), \quad t > 0, \quad D \in \mathbb{R}, \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0, & & t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), & & u_0 \in L_2(0,1). \end{aligned}$$

a) Lösen Sie die Gleichung für $D = 1$ (Vorwärtsdiffusion) und $D = -1$ (Rückwärtsdiffusion) durch Separation der Variablen $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$.
Hinweis: Entwickeln Sie den Operator ∂_x^2 mit den Neumann-Randbedingungen nach den Eigenfunktionen $\varphi_k(x)$. Benutzen Sie dann die Darstellung in der Eigenfunktionenbasis

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \psi_k(t) \varphi_k(x),$$

um die α_k zu finden. Beachten Sie dabei, dass eine periodische Funktion f mit einer Periode $T > 0$ eine Fourierreihenentwicklung besitzt, wenn die Funktion f, auf eine Periode $[c, c+T]$ eingeschränkt, dem Funktionenraum $L_2(c, c+T)$ angehört.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Diskrete Sprungprozesse-Random Walks, Zustandsänderungen:
Betrachten Sie einfache Sprungprozesse auf einem Gitter $h\mathbb{Z}^2$ mit Schrittweite $h > 0$. Nehmen Sie an, dass in einem kleinen Zeitschritt $\tau > 0$ das Teilchen nur einen Gitterpunkt weiter springen darf und dass für die Wahrscheinlichkeiten der Sprünge

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \text{konstant}$$

gilt. Das Teilchen besitzt zwei Zustände A und B. Der Zustand kann sich zwischen zwei Sprüngen mit einer Wahrscheinlichkeit $\xi \in (0,1)$ ändern.
Leiten Sie die Gleichungen für die Diffusion her.
Hinweis: Betrachten Sie für den Zustand eine eigene Wahrscheinlichkeitsdichte ρ.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 14.01.2010, 10.00 Uhr)
1D Diffusionsgleichung:
Implementieren Sie eine Finite-Differenzen-Methode zur Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\rho_t = \rho_{xx}, \quad x \in (0,1) \quad t > 0.$$

Zum Test des Verfahrens verwenden Sie die Werte

$$\rho(0,t) = \rho(1,t) = 0 \quad \text{und} \quad \rho(x,0) = 1 - |1 - 2x|.$$

Zur Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung verwenden Sie ein explizites Schema

$$\frac{\rho(x_i, t_{j+1}) - \rho(x_i, t_j)}{\Delta t} = \frac{\rho(x_{i-1}, t_j) - 2\rho(x_i, t_j) + \rho(x_{i+1}, t_j)}{(\Delta x)^2}$$

und ein rein implizites Schema

$$\frac{\rho(x_i, t_{j+1}) - \rho(x_i, t_j)}{\Delta t} = \frac{\rho(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2\rho(x_i, t_{j+1}) + \rho(x_{i+1}, t_{j+1})}{(\Delta x)^2}$$

mit jeweils $\Delta x = 0.0145,\ \Delta t = 0.0001$ und $\Delta x = 0.013748,\ \Delta t = 0.0001$.