
Übung zur Vorlesung
Numerik Partieller Differentialgleichungen
SoSe 2010 — Blatt 1

1 Wiederholungen

1. Definition (Partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung)

$u \in C^2(\Omega)$ heißt klassische Lösung einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, falls gilt:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i,x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (1)$$

Dabei sind $a_{ij}, b_i, c, f \in C^0(\Omega)$ für $i, j = 1, \dots, n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ und $u_{x_i} := \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$. Da $u \in C^2(\Omega)$ ist, gilt $u_{x_i,x_j}(x) = u_{x_j,x_i}(x)$ und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ gilt. Dann ist

$$A(x) = \left(a_{ij}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

symmetrisch und hat n reelle Eigenwerte. Wir setzen $\mathbf{b}(x) := (b_1(x), \dots, b_n(x))$.

2. Definition (Klassifizierung für Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung)

- (a) Die Partielle Differentialgleichung (1) heißt hyperbolisch in $x \in \Omega$, falls $n - 1$ Eigenwerte von $A(x)$ gleiches Vorzeichen besitzen und ein Eigenwert das entgegengesetzte Vorzeichen hat.
- (b) Die Partielle Differentialgleichung (1) heißt elliptisch in $x \in \Omega$, falls alle Eigenwerte von $A(x)$ das gleiche Vorzeichen besitzen.
- (c) Die Partielle Differentialgleichung (1) heißt parabolisch in $x \in \Omega$, falls $n - 1$ Eigenwerte von $A(x)$ gleiches Vorzeichen haben, ein Eigenwert verschwindet und zusätzlich gilt:

$$\text{Rg}(A(x), \mathbf{b}(x)) = n.$$

3. Bemerkung

Definition 2 deckt nicht alle denkbaren Typen ab. Allerdings sind die definierten Typen die wichtigsten in den Anwendungen.

Aufgabe 1 (Klassifizierung partieller Differentialgleichungen)

Klassifizieren Sie folgende partielle Differentialgleichungen:

- (a) die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u(x) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

- (b) die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(x, y, t) - \Delta u(x, y, t) = f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega_T \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+,$$

(c) und die Wellengleichung

$$\partial_{tt}u(x, t) = c\partial_{xx}u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Hierbei ist $\Delta u(x, y) := \partial_{xx}u(x, y) + \partial_{yy}u(x, y)$.

Aufgabe 2 (Differentialoperatoren)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und seien $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u = \nabla \cdot u &:= \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} u_j & \operatorname{rot} u &:= (\partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2, \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3, \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1) \\ \operatorname{grad} w = \nabla w &:= (\partial_{x_1} w, \partial_{x_2} w, \partial_{x_3} w)^T & \Delta u &:= (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3) \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} w &= \Delta w & \operatorname{div} (wu) &= w \operatorname{div} u + \operatorname{grad} w \cdot u \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} w &= 0 & \operatorname{rot} \operatorname{rot} u &= \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \Delta u \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} u &= 0 & \operatorname{div} (u \times v) &= v \cdot \operatorname{rot} u - u \cdot \operatorname{rot} v. \end{aligned}$$

2 Fallstudie: Numerische Approximation der Helmholtzgleichung

Wir betrachten die Helmholtzgleichung in $\Omega := [0, \pi] \times \mathbb{R}^+$

$$\Delta u + k^2 u(x) = 0 \tag{2}$$

mit den Randbedingungen auf $\partial\Omega = \mathbb{R} \times \{0\}$

$$u(x, 0) = f(x) \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \text{ sowie } u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^+ \tag{3}$$

für eine Funktion f von der Form $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin(kx)$.

Aufgabe 3 (Analytische Lösung)

Berechnen Sie die Lösung der Helmholtzgleichung (2) mit Randbedingungen (3).

Tipp: Trennung der Variablen.

Aufgabe 4 (Numerische Lösung)

Schlagen Sie ein Marching-Verfahren zur Berechnung der Lösung vor.

Welche numerischen Probleme erwarten Sie?

Hinweis: Originalartikel

Auf der Vorlesungsseite ist zu diesem Thema der Artikel

A propagation-backpropagation method for ultrasound tomography

Natterer, F. und Wübbeling, F., Inverse Problems, 1995

verlinkt.