

---

Übung zur Vorlesung  
**Numerik Partieller Differentialgleichungen**  
SoSe 2010 — Blatt 10

---

**Aufgabe 1 (Gradientenverfahren)**

Sei  $a > 0$ . Gesucht werde das Minimum von

$$f(x) = \frac{1}{2}x'Ax - b'x, \quad x \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad b = 0$$

und  $\kappa(A) = \max(a, \frac{1}{a})$ .

- (a) Geben Sie die explizite Form des *Gradientenverfahrens* mit Startvektor  $x = (a, 1)$  an.
- (b) Zeigen Sie, dass die Konvergenzrate des Verfahrens gleich der in der Vorlesung bewiesenen ist.
- (c) Zeichnen Sie für  $a = 4$  die ersten Iterierten und die zugehörigen Höhenlinien.

**Aufgabe 2 (Vorkonditionierung von LGS)**

Zu einem Gleichungssystem  $Ax = b$  mit  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $a_{ii} \neq 0$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  bestehe die *Zeilenäquilibration* darin das System  $C Ax = C b$  zu lösen, wobei  $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $c_i = (\sum_{k=1}^n |a_{ik}|)^{-1}$ . Die *Diagonalvorkonditionierung* verwendet stattdessen die Matrix  $C' = \text{diag}(a_{11}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1})$ . Gegeben seien für  $a \neq 0$  die folgende Matrix und ihre Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & 2a & 4a^2 \end{pmatrix} \text{ mit } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2a} & \frac{2}{a} & -\frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2a^2} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{2a^2} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie für  $a > 4$  die Kondition  $\text{cond}_\infty(A)$ ,  $\text{cond}_\infty(CA)$  und  $\text{cond}_\infty(C'A)$  (d.h. die Kondition bzgl. der induzierten  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm). Welches der Verfahren ist daher für große  $a$  zu bevorzugen?