Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Dr. Frank Wübbeling und Lars Ruthotto 24.06.2010

Übung zur Vorlesung

Numerik Partieller Differentialgleichungen

SoSe 2010 — Blatt 9

Aufgabe 1

Gegeben sei die Aufteilung eines Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ in achsenparallele Rechtecke mit Höhe und Breite h. Berechnen Sie die zugehörigen Elementmatrizen bzw. Systemmatrizen für die Poissongleichung im Inneren von Omega für einen nichtkonformen Finite Elemente-Ansatz mit Wilson-Rechtecken.
Hinweis: Machen Sie sich mit der `symbolic` math-Toolbox von Matlab vertraut und nutzen Sie sie zur Berechnung. Alternativ nehmen Sie gleich Maple.
Die Formfunktionen des Wilson-Rechtecks auf dem Einheitsrechteck mit Ecken ± 1 sind:

$$\phi_1(x,y) = \frac{(1+x)(1+y)}{4}, \phi_2(x,y) = \frac{(1+x)(1-y)}{4}$$
$$\phi_3(x,y) = \frac{(1-x)(1+y)}{4}, \phi_4(x,y) = \frac{(1-x)(1-y)}{4}$$
$$\phi_5(x,y) = \frac{x^2-1}{2}, \phi_6(x,y) = \frac{y^2-1}{2}.$$

Aufgabe 2 (Nicht-konformes Verfahren für die Plattengleichung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein rechteckiges Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Leiten Sie ein finite Elemente Verfahren für die Plattengleichung

$$\Delta^2 u = f$$

im Sobolevraum $H_0^2(\Omega)$ her. Benutzen Sie dazu Adini-Rechtecke. Zeigen Sie, dass das Verfahren konvergiert.

Aufgabe 3

Sei Ω ein Lipschitz-Gebiet, W ein endlich-dimensionaler Teilraum von $H^t(\Omega)$ mit $\mathcal{P}_{t-1} \subset W$. Sei b eine stetige Bilineaform auf $H^s(\Omega) \times W$ mit

$$b(p,q) = 0 \text{ für } p \in \mathcal{P}_{s-1} \text{ oder } q \in \mathcal{P}_{t-1}.$$

Dann gibt es eine Konstante C, sodass für alle $v \in H^t(\Omega), w \in W$

$$|b(v,w)| \leq C|v|_{H^s(\Omega)}|w|_{H^t(\Omega)} \text{ gilt.}$$

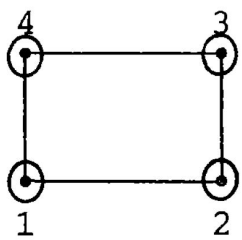

Abbildung 1: Adini-Rechteck