

Übungen zur Vorlesung **Optimierung**

Übungsblatt 1, Abgabe: Freitag, 23.10.2009, 8.15 Uhr

Wöchentliche Übungstermine:

Gruppe 1:	Di.	10 Uhr	SR1	Briefkasten	101	(Elisabeth Bauma)
Gruppe 2:	Di.	12 Uhr	SR1	Briefkasten	102	(Matthias Bruns)
Gruppe 3:	Di.	16 Uhr	SR1	Briefkasten	103	(Karin Niehues)
Gruppe 4:	Mi.	10 Uhr	SR702	Briefkasten	104	(Claudia Denecke)

Die Teilnahme an einer Übungsgruppe setzt eine Anmeldung über das Kursbuchungssystem des Fachbereichs 10 voraus. Informationen hierzu sowie Aktuelles rund um die Vorlesung sind zu finden unter:

http://wwwmath1.uni-muenster.de/num/Vorlesungen/Optimierung_WS09

Aufgabe 1: (2+1+1 Punkte)

Gegeben seien die nichtleere und konvexe Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ sowie die konvexe Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

- Jedes lokale Minimum von f ist auch ein globales Minimum von f .
- Die Menge der (globalen) Minima ist konvex.
- Ist f streng konvex, dann existiert höchstens ein (globales) Minimum.

Aufgabe 2: (1+1+1+2 Punkte)

Hinweis: Setzen Sie folgendes Resultat als bekannt voraus:

- $(\text{Hess } f)(x)$ positiv semidefinit $\Rightarrow f$ konvex.
- $(\text{Hess } f)(x)$ positiv definit $\Rightarrow f$ strikt konvex.

Gegeben sei eine quadratische Funktion der Gestalt

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $b \in \mathbb{R}^n$.

- Sei A *positiv definit*. Zeigen Sie, dass es nur einen stationären Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (d.h. $\nabla f(\bar{x}) = 0$) gibt und geben Sie diesen explizit an. Ist \bar{x} in diesem Fall auch ein striktes globales Minimum von f ?
- Seien A *positiv semidefinit* (aber nicht positiv definit) und $b \in \text{Bild}(A)$. Zeigen Sie, dass es in diesem Fall unendlich viele stationäre Punkte gibt, die auch Minima von f sind. Untersuchen Sie den Fall $b \notin \text{Bild}(A)$.

- bitte wenden -

- (c) Sei A indefinit und invertierbar, d.h. A habe sowohl positive als auch negative Eigenwerte, die alle ungleich Null sind. Zeigen Sie, dass es nur einen stationären Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt, der aber weder Minimum noch Maximum ist („Sattelpunkt“).
- (d) Illustrieren Sie die vorangegangenen drei Fälle für $n = 2$ und $b = 0 \in \mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie mit MATLAB jeweils die vier Höhenlinien $f(x) = t$, $t = -1, 0, 1, 2$ für die Fälle

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Benötigter MATLAB-Befehl: `contour`. Rufen Sie bei Bedarf über `help contour` die Hilfefunktion auf.)

Aufgabe 3: (2+2 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Extrema:

- (a) $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 12x_1x_2 - 3x_2^2$.
- (b) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cos(x_2)$.

Aufgabe 4: (2+2+3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{(-x^2 - 4y^2)}.$$

- (a) Stellen Sie f im Bereich $-2 \leq x, y \leq 2$ mit MATLAB graphisch dar.
(Hinweis: Benötigte MATLAB-Befehle: `meshgrid` und `mesh`)
- (b) Stellen Sie die Höhenlinien (Niveaumengen) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = z\}$ für $z = 0.0001, 0.001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 1$ im Bereich $-2 \leq x, y \leq 2$ mit MATLAB dar.
(Hinweis: Benötigter MATLAB-Befehl: `contour`.)
- (c) Berechnen Sie (per Hand) die lokalen Extrema von f , indem Sie alle stationären Punkte bestimmen und die Hesse-Matrix $(\text{Hess } f)(x)$ in diesen Punkten auf Definitheit untersuchen.

Bitte bei (a) und (b) die Achsen (`xlabel`, `ylabel`, ggf. `zlabel`) und die Graphik (`title`) beschriften und die Ausdrücke der Plots abgeben.