Prof. Dr. H. Maurer, Dipl.-Math. B. Christiansen

Übungen zur Vorlesung **Optimierung**

Übungsblatt 12, Abgabe: Freitag, 22.1.2010, 8.15 Uhr

Aufgabe 41: (4 Punkte)

Sei A eine symmetrische $n \times n$ -Matrix. Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$\min\ f(x) = \langle x,\, Ax \rangle$$

unter der Nebenbedingung $||x||_2^2 = 1$.

(a) Untersuchen Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen.

(b) Welche Voraussetzung muss die Matrix A erfüllen, damit die hinreichenden Optimalitätsbedingungen gelten?
Hinweis: Betrachten Sie eine Orthonormalbasis von A aus Eigenvektoren.

Aufgabe 42: (4 Punkte)
Einer Pyramide mit bekannter Unterkantenlänge a und Höhe h soll ein Quader maximalen Inhalts einbeschrieben werden (vgl. Bild 1).

a) Formulieren Sie das nichtlineare Optimierungsproblem mit Beschränkungen.

b) Geben Sie die optimale Lösung an.

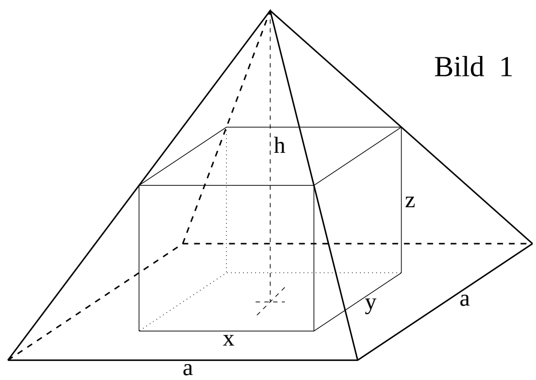

Bild 1

Hinweis: Betrachten Sie den Querschnitt der Pyramide und vermeiden Sie den Satz von Pythagoras.

Aufgabe 43: (4 Punkte)
Gegeben sei das folgende Minimierungsproblem:

$$\begin{array}{rrl} \text{Maximiere} & x_1 & \\ \text{unter} & x_2 - (1-x_1)^3 & \leq 0, \\ & x_1 & \geq 0, \\ & x_2 & \geq 0. \end{array}$$

(a) Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.

(b) Berechnen Sie den Tangentialkegel und den linearisierenden Kegel der zulässigen Menge im Punkt $\bar{x} = (1,0)^T$. Zeigen Sie, dass $\bar{x}$ nicht regulär ist und dass es kein $\lambda \in \mathbb{R}^3$ gibt, welches die KKT-Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 44: (4 Punkte)

(a) Die Menge S_α sei gegeben durch

$$S_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x_2 - x_1^\alpha \leq 0, \quad -x_2 - x_1^\alpha \leq 0 \right\}, \quad \alpha \in \mathbb{N},\ \alpha \geq 1.$$

Skizzieren Sie S_α für $\alpha \geq 1$ und berechnen Sie den Tangentialkegel $T(S_\alpha, \bar{x})$ und den linearisierenden Kegel $L(S_\alpha, \bar{x})$ für $\bar{x} = (0,0)^T,\ \alpha \geq 1$.

(b) Seien A eine symmetrische $(n,n)-$Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Geben Sie für die Menge

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, \frac{1}{2} x^T A x + b^t x \geq \alpha \right\}$$

den linearisierenden Kegel $L(S, \overline{x})$ in einem Punkt $\overline{x} \in S$ an.