

Übungen zur Vorlesung **Optimierung**

Übungsblatt 9, Abgabe: Freitag, 18.12.2009, 8.15 Uhr

Aufgabe 30: (3 Punkte)

Berechnen Sie mit dem dualen Simplex-Verfahren die Lösung des LP's

$$\begin{array}{llll} \text{minimiere} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 \\ \text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 42, \\ & -4x_1 & + & 8x_3 & \geq & -7, \\ & 3x_2 & - & 2x_3 & \geq & 105, \\ & & & x & \geq & 0. \end{array}$$

Aufgabe 31: (2+2+2 Punkte)

Bei der Lösung des Problems

$$(P) \quad \min \{cx \mid Ax \geq b, \quad x \geq 0\}, \quad c \geq 0$$

mit dem dualen Simplex-Verfahren löst man

$$(P_1) \quad \min \{cx \mid -Ax + y = -b, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

vom "dualen Standpunkt". Die optimale Lösung sei nicht entartet.

Zeigen Sie: Die optimale Lösung λ des dualen Problems

$$(P^*) \quad \max \{\lambda b \mid \lambda A \leq c, \quad \lambda \geq 0\}$$

erhält man aus dem optimalen Tableau folgendermaßen:

(a) y_j Basis-Variable $\Rightarrow \lambda_j = 0$,

(b) y_j Nicht-Basis-Variable $\Rightarrow \lambda_j = -r_{N(j)}$, $r_{N(j)}$ ist der unter y_j stehende Koeffizient.

Hinweis: Zeigen Sie, dass zwischen der Lösung $\tilde{\lambda}$ des dualen Problems von (P_1) und der Lösung λ von (P^*) die Beziehung $\lambda = -\tilde{\lambda}$ gilt.

(c) Überprüfen Sie die Aussage in (a) und (b) an der Lösung des LP's

$$\min\{x_1 + x_2 \mid 2x_1 + x_2 \geq 12, \quad 5x_1 + 8x_2 \geq 74, \quad x_1 + 6x_2 \geq 28, \quad x \geq 0\}.$$

Aufgabe 32: (5 Punkte)
Lösen Sie das LP

$$\begin{array}{rll}
 \text{Maximiere} & 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 3x_5 & \\
 \text{unter} & 2x_1 + 2x_2 & + 2x_4 \leq 12, \\
 & 2x_1 & + 2x_4 \geq 2, \\
 & -4x_1 & + 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 \geq 8, \\
 & & 2x_2 + 4x_3 + 4x_5 = 22, \\
 & 2x_1 + 2x_2 & + 2x_4 + 2x_5 = 12, \\
 & & x \geq 0,
 \end{array}$$

mit der Dreiphasenmethode. Der optimale Wert ist $z_0 = \frac{201}{4}$.

Aufgabe 33: (Programmieraufgabe, Abgabe: 8.1.2010, 8.15 Uhr)
Die **Himmelblau-Funktion**

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (x_1, x_2) &\mapsto (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2
 \end{aligned}$$

ist eine beliebte Testfunktion, mit welcher oft die Effizienz von Optimierungsalgorithmen überprüft wird. Sie hat eine lokale Maximalstelle und vier lokale Minimalstellen, die zugleich auch globale Minimalstellen mit Funktionswert 0 sind.

- (a) Fertigen Sie mittels MATLAB ein 3D-Schaubild der Oberfläche von f auf dem Gebiet $[-5, 5] \times [-5, 5]$ an.

Erinnerung: MATLAB-Befehle `mesh` oder `surf`; ggf. über `doc mesh` bzw. `doc surf` die MATLAB-Hilfe aufrufen.

- (b) Fertigen Sie mittels MATLAB ein Schaubild der Höhenlinien von f auf dem Gebiet $[-5, 5] \times [-5, 5]$ an. Sinnvoll wären beispielsweise die Höhenlinien $f(x_1, x_2) = c$ für $c = 2^k$, $k = 0, 1, \dots, 10$.

Erinnerung: MATLAB-Befehl `contour`.

- (c) Schreiben Sie AMPL-Programme zur Bestimmung der Extremstellen von f . Verwenden Sie hierbei verschiedene Startschätzungen für die Optimierungsvariablen x_1 und x_2 , indem Sie durch das `let`-Kommando diesen Variablen Anfangswerte zuweisen, z.B.

```
let x1 := -5;
let x2 := -5;
```

Wählen Sie zur Bestimmung der vier lokalen Minimalstellen als Startwerte die vier Ecken des Gebiets $[-5, 5] \times [-5, 5]$ und zur Bestimmung der lokalen Maximalstelle den Ursprung, vgl. Schaubild der Höhenlinien.

Abgabe: Bitte bei Aufgabenteil (a) und (b) die beschrifteten Schaubilder und bei Aufgabenteil (c) den AMPL-Quellcode sowie die numerischen Ergebnisse in Papierform abgeben.