

**Kantenerkennung im optischen Fluß
als mehrdimensionales Steuerungsproblem**

Christoph Brune, Helmut Maurer und Marcus Wagner

Reihe Mathematik
M-01/2008

Brandenburgische Technische Universität Cottbus
Fakultät 1, Mathematisches Institut
Postfach 10 13 44, D-03013 Cottbus

Kantenerkennung im optischen Fluß als mehrdimensionales Steuerungsproblem

Christoph Brune, Helmut Maurer und Marcus Wagner

1. Einleitung.

Eine Hauptaufgabe der mathematischen Bildverarbeitung besteht darin, aus einer gegebenen Bildfolge Informationen über Gestalt und Bewegungsverhalten der abgebildeten Objekte zu gewinnen (“object recognition”, “motion tracking”). In diesem Zusammenhang benutzt man häufig das Konzept des *optischen Flusses*: Man bestimmt für aufeinanderfolgende Bilder jeweils ein Vektorfeld, das Bildpunkte gleicher Intensität ineinander überführt, bzw. dessen Zeitableitung.⁰¹⁾ Das Konzept des optischen Flusses wird auch in anderen Zusammenhängen verwendet, beispielsweise bei der Datenkompression von Videobildsequenzen,⁰²⁾ der automatischen Retusche beim Digitalisieren von Filmmaterial⁰³⁾ oder der Rekonstruktion dreidimensionaler Objekte aus Stereobildpaaren (“depth from stereo”).⁰⁴⁾ Seine größte Bedeutung liegt jedoch in seiner Eigenschaft als Hilfsmittel zur Extraktion von Objekt- und Bewegungsinformationen.⁰⁵⁾ Hierbei sind die Unstetigkeiten (“Kanten”) im optischen Fluß von besonderem Interesse. Ihre Erkennung sollte idealerweise nicht in einem zusätzlichen Schritt erfolgen, sondern simultan zur Berechnung des optischen Flusses ausgeführt werden. Außerdem ist es sinnvoll, im optischen Fluß “Bewegungskanten”, d. h. Grenzen zwischen den Projektionen bewegter Objekte, und “Intensitätskanten”, d. h. starke Gradienten der Intensität der Grauwerte innerhalb der Projektionen der bewegten Objekte, zu unterscheiden.

In der Literatur greift man zur Bestimmung des optischen Flusses häufig auf Regularisierungsmethoden zurück,⁰⁶⁾ so daß man zur Lösung eines mehrdimensionalen Variationsproblems gelangt.⁰⁷⁾ Für die simultane Kantenerkennung im optischen Fluß bestehen dann zwei Möglichkeiten. Einerseits kann man im Variationsproblem das Zielfunktional mit Daten- und Regularisierungsterm durch ein Ambrosio-Tortorelli-Funktional ersetzen, wobei neben dem optischen Fluß eine “Kantenskizze” k als zusätzliche Variable aufgesucht wird.⁰⁸⁾ Die zweite Möglichkeit besteht darin, konvexe Restriktionen für die Gradienten des optischen Flusses hinzuzufügen, womit das gegebene Variationsproblem in ein mehrdimensionales Steuerungsproblem vom sog. Dieudonné-Rashevsky-Typ übergeht. Der Kantendetektor k kann dann unmittelbar aus den Steuervariablen aufgebaut werden.⁰⁹⁾

⁰¹⁾ Siehe [AUBERT/KORNPROBST 02], pp. 184 ff.

⁰²⁾ [HINTERBERGER/SCHERZER 01].

⁰³⁾ [GROSSAUER 06].

⁰⁴⁾ [SLESAREVA/BRUHN/WEICKERT 05].

⁰⁵⁾ Siehe z. B. [BROX/BRUHN/WEICKERT 06], [GANDHI/DEVADIGA/KASTURI/CAMPS 00], [JUNG/SUKHATME 05], [KUMAR/HAKER/STILLMAN/CURRY/GIDDENS/TANNENBAUM/YEZZI 01] und [TALUKDER/MATTHIES 04].

⁰⁶⁾ [SCHERZER/GRASMAIR/GROSSAUER/HALTMEIER/LENZEN 07], pp. 41 ff.

⁰⁷⁾ Aus der umfangreichen Literatur nennen wir [BRUHN/WEICKERT/SCHNÖRR 05], [ENKELMANN 88] und [WEICKERT/SCHNÖRR 01]. Die Variationsformulierung des Problems des optischen Flusses geht bereits auf [HORN/SCHUNCK 81] zurück.

⁰⁸⁾ Für das image-segmentation-Problem ist dieses Verfahren wohlbekannt. Wir verweisen auf [AMBROSIO/TORTORELLI 90], [AMBROSIO/TORTORELLI 92], [BELLETTINI/COSCIA 94] und [BOURDIN 99]. Im Kontext des optischen Flusses wurde diese Methode bisher lediglich in [NESI 93] (mit unbefriedigenden numerischen Resultaten) und [BRUNE 07] angewendet.

⁰⁹⁾ Siehe [WAGNER 07], p. 14 f.

In der vorliegenden Arbeit schlagen wir den zweiten Weg ein und lösen zur Bestimmung des optischen Flusses mit simultaner Kantenerkennung mehrdimensionale Steuerungsprobleme. Unser Interesse an der Formulierung und Lösung der Aufgabe im Rahmen der optimalen Steuerung hat mehrere Gründe. Zunächst ist aus der Sicht der nichtlinearen Optimierung zu bemerken, daß mit der vorliegenden Arbeit (und der zu veröffentlichenden Arbeit [FRANEK/FRANEK/MAURER/WAGNER 08]) erstmals die Anwendung einer direkten Methode auf ein mehrdimensionales Steuerungsproblem vom Dieudonné-Rashevsky-Typ dokumentiert wird.¹⁰⁾ Die Rechnungen wurden im Rahmen der Diplomarbeit [BRUNE 07] des ersten Verfassers durchgeführt.

Im Rahmen der mathematischen Bildverarbeitung ist die Auswirkung von Gradientenbeschränkungen nach unserer Kenntnis bisher nicht untersucht worden und daher von prinzipiellem Interesse. Unsere numerischen Experimente zeigen, daß eine Gradientenbeschränkung bereits für sich genommen eine regularisierende Wirkung hat (Abschnitt 5.a)). Weiterhin erlaubt die Steuerungsformulierung die Einbeziehung verschiedener Regularisierungsterme, so daß wir insbesondere untersuchen können, wie die Wahl der Terme und Parameter die Unterscheidung von Bewegungs- und Intensitätskanten beeinflusst (Abschnitt 5.b)). In einer weiteren Versuchsreihe betrachten wir ein Steuerungsproblem mit L^1 -Regularisierungsterm, das gelöst wird, indem die Steuervariablen in positive und negative Anteile zerlegt werden (Abschnitt 5.c)). Zur Bewertung der Güte der Darstellung der beiden Kantentypen definieren wir zwei neue Indikatoren, den “motion edge error” (MEE) und den “intensity edge error” (IEE) (Definitionen 4.1. und 4.2.). Die numerische Lösung eines Variationsproblems mit einem Ambrosio-Tortorelli-Zielfunktional liefert im Vergleich keine signifikant besseren Ergebnisse.¹¹⁾

Dabei wollen wir wie folgt vorgehen: Wir beginnen im folgenden *Kapitel 2* mit der Erläuterung von Variations- und Steuerungsformulierung für das Problem des optischen Flusses. Anschließend formulieren wir in *Kapitel 3* einen Existenzsatz für mehrdimensionale Steuerungsprobleme vom Dieudonné-Rashevsky-Typ, der die Anwendung direkter Methoden rechtfertigt, und gehen näher auf Diskretisierung und numerisches Lösungsverfahren ein. In *Kapitel 4* beschreiben wir die verwendeten Bilddaten sowie die Visualisierung und Bewertung der Ergebnisse unserer Rechnungen. Schließlich dokumentieren wir in *Kapitel 5* die Ergebnisse unserer numerischen Experimente.

Zur Notation.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ Abschluß eines beschränkten Lipschitzgebietes im strengen Sinne. Dann bezeichnet $C^k(\Omega, \mathbb{R}^r)$ den Raum der r -Vektorfunktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$, deren Komponenten stetig ($k = 0$) bzw. k -mal stetig differenzierbar sind ($k = 1, \dots, \infty$) und $L^p(\Omega, \mathbb{R}^r)$ den Raum der r -Vektorfunktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$, deren Komponenten über Ω in p -ter Potenz integrierbar ($1 \leq p < \infty$) bzw. meßbar und wesentlich beschränkt sind ($p = \infty$). $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^r)$ bezeichnet den Sobolevraum aller r -Vektorfunktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$, deren Komponenten f_i kompakte Träger $\text{supp}(f_i) \subseteq \Omega$ und verallgemeinerte partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen sowie zusammen mit ihren verallgemeinerten Ableitungen zum $L^p(\Omega, \mathbb{R})$ gehören ($1 \leq p < \infty$). Schließlich verstehen wir unter $W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^r)$ den Sobolevraum aller r -Vektorfunktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$, deren Komponenten f_i Lipschitz-stetig sind und den Randwert Null annehmen.¹²⁾ Jx bezeichnet die Jacobimatrix der Vektorfunktion $x \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^r)$. Die Abkürzung “ $(\forall) t \in A$ ” ist zu lesen als “für fast alle $t \in A$ ” bzw. “für alle $t \in A$ mit Ausnahme einer Lebesgueschen Nullmenge”. Schließlich bezeichnet \mathfrak{o} kontextabhängig den Nullvektor des zugrundegelegten Raumes.

¹⁰⁾ In [DEWESS/HELBIG 95] wurde ein Transportflußproblem als duale Aufgabe zu einem Dieudonné-Rashevsky-Problem $(P)_0$ mit Mitteln der kombinatorischen Optimierung numerisch gelöst.

¹¹⁾ [BRUNE 07], pp. 77 ff.

¹²⁾ [EVANS/GARIEPY 92], p. 131, Theorem 5.

2. Variations- und Steuerungsformulierung für das Problem des optischen Flusses.

a) Das Konzept des optischen Flusses.

Wir gehen von einer Familie $\{I(s, t)\}$, $0 \leq t \leq T$, von Graustufenbildern¹³⁾ mit identischen Wertebereichen aus, wobei wir voraussetzen, daß die Randwerte aller Bilder Null sind (konstanter Rahmen). Gesucht wird ein Phasenfluß $X(s, t) = (X_1(s, t), X_2(s, t))^T : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, der die Bilder unter Erhalt der Grauwerte ineinander überführt, also der Bedingung

$$I(s_1, s_2, t) = I(s_1 - X_1(s, t), s_2 - X_2(s, t), 0), \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{mit} \quad (2.1)$$

$$X_1(s, 0) = 0, \quad X_2(s, 0) = 0 \quad (2.2)$$

für alle $s = (s_1, s_2)^T \in \Omega$ genügt. Hängen die Bilddaten und das Vektorfeld $X(s, t)$ überdies stetig differenzierbar von der Zeit t ab, so ergibt sich durch Differentiation nach t

$$I_t(s, t) = -I_{s_1}(s - X(s, t), 0) \cdot (X_1)_t(s, t) - I_{s_2}(s - X(s, t), 0) \cdot (X_2)_t(s, t), \quad (2.3)$$

und daraus für $t = 0$ die Gleichung ("optical flow constraint")

$$I_{s_1}(s, 0) (X_1)_t(s, 0) + I_{s_2}(s, 0) (X_2)_t(s, 0) + I_t(s, 0) = 0 \quad \forall s \in \Omega. \quad (2.4)$$

Das Vektorfeld $x(s, t) = ((X_1)_t(s, t), (X_2)_t(s, t))^T$ wird als *optischer Fluß* bezeichnet. In der Praxis berechnet man den optischen Fluß meistens für Bildpaare $I(s, t_N)$, $I(s, t_{N+1})$ mit $\Delta t = t_{N+1} - t_N = 1$ als Lösung $(x_1(s), x_2(s))^T$ der Gleichung

$$I_{s_1}(s, t_N) x_1(s) + I_{s_2}(s, t_N) x_2(s) + I_t(s, t_N) = 0 \quad \forall s \in \Omega, \quad (2.5)$$

wobei die Lösung auf den Referenzzeitpunkt t_N bezogen wird. Da der optische Fluß durch die Gleichungen (2.4) bzw. (2.5) nicht eindeutig bestimmt ist ("aperture problem"), formuliert man anstelle von (2.5) ein mehrdimensionales Variationsproblem¹⁴⁾

$$(V)_1: \quad F(x_1, x_2) = \int_{\Omega} \left(I_{s_1}(s) x_1(s) + I_{s_2}(s) x_2(s) + I_t(s) \right)^2 ds \quad (2.6)$$

$$+ \mu \cdot \int_{\Omega} r(s, \nabla x_1(s), \nabla x_2(s)) ds \longrightarrow \inf!; \quad (x_1, x_2) \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2)$$

mit $1 \leq p < \infty$, $\mu > 0$, $I \in W_0^{1,\infty}(\Omega \times (t_N - \delta, t_{N+1} + \delta), \mathbb{R})$ und $r \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R})$. Der Gradient bezieht sich hierbei auf die Variablen s_1 und s_2 , während der Bezug der Daten auf den Referenzzeitpunkt $t = t_N$ nicht mehr notiert wurde. Das Zielfunktional besteht aus einem Term, der den Defekt in (2.5) minimiert,¹⁵⁾ und einem Regularisierungsterm, in den die ersten partiellen Ableitungen des gesuchten Vektorfelds eingehen. Konvexe Regularisierungsterme werden in der Literatur nach den Kategorien

¹³⁾ Graustufenbilder sollen durch Funktionen I mit rechteckigem Definitionsbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und Werten $0 \leq I(s) \leq 1$ ($\forall s \in \Omega$) beschrieben werden, die mindestens meßbar sind.

¹⁴⁾ In der Literatur werden die Aufgaben auch für $x \in BV(\Omega, \mathbb{R}^2)$ untersucht; vergleiche z. B. [AUBERT/DERICHE/KORNPROBST 99], pp. 162 – 174, [HINTERBERGER/SCHERZER/SCHNÖRR/WEICKERT 02], pp. 81 ff., und [KORNPROBST/DERICHE/AUBERT 99], pp. 9 ff.).

¹⁵⁾ Defektminimierungsterme höherer Ordnung wurden in [BRUHN/WEICKERT/KOHLBERGER/SCHNÖRR 06], p. 262 f., und [PAPENBERG/BRUHN/BROX/DIDAS/WEICKERT 06], pp. 143 ff., vorgeschlagen.

isotrop/anisotrop bzw. flußgetrieben/bildgetrieben klassifiziert, wobei die Euler-Lagrange-Gleichungen für hinreichend glatte Lösungen von (V)₁ als rechte Seiten eines Systems von Diffusionsgleichungen interpretiert werden.¹⁶⁾

b) Kantenerkennung im optischen Fluß.

Wie in der Einleitung dargelegt wurde, kann eine simultane Kantenerkennung im optischen Fluß zunächst dadurch ausgeführt werden, daß man das Zielfunktional in (V)₁ durch ein Ambrosio-Tortorelli-Funktional ersetzt. Dabei wird zusätzlich zu einer (geglätteten) Version des optischen Flusses eine Funktion k als "Kantenskizze" aufgesucht, wobei $k(s) \approx 0$ oder $k(s) \approx 1$, je nachdem der Punkt $s \in \Omega$ zu einer Kante in (x_1, x_2) gehört oder nicht. Es entsteht folgendes Variationsproblem:

$$(V)_2: \quad F(x_1, x_2, k) = c_1(\varepsilon) \int_{\Omega} \left(I_{s_1}(s) x_1(s) + I_{s_2}(s) x_2(s) + I_t(s) \right)^2 ds \quad (2.7)$$

$$+ c_2(\varepsilon) \int_{\Omega} \left(|\nabla x_1(s)|^2 + |\nabla x_2(s)|^2 \right) \cdot \left(k(s)^2 + c_4(\varepsilon) \right) ds$$

$$+ c_3(\varepsilon) \int_{\Omega} \left(\varepsilon \cdot |\nabla k(s)|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (1 - k(s))^2 \right) ds \longrightarrow \inf!; \quad (x_1, x_2, k) \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2) \times W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})$$

mit I wie oben, $\varepsilon > 0$ und Gewichten $c_i(\varepsilon) > 0$, $1 \leq i \leq 4$. Der erste Term im Zielfunktional ist wiederum ein Datenterm, der die Abweichungen von (2.5) bestraft. Der zweite Term ersetzt den klassischen Regularisierungsterm in (V)₁ und koppelt x und k derart, daß in Punkten $s \in \Omega$ mit betragsgroßem $\nabla x(s)$ der Wert $k(s) \approx 0$ bevorzugt wird. Im dritten Summanden hat der erste Term eine lokale Glättung von k zur Folge, während der zweite erzwingt, daß bis auf eine Menge kleinen Maßes $k(s) \approx 1$ gilt. Die Interpretation von k als Kantenskizze müßte noch gerechtfertigt werden, indem man die Γ -Konvergenz der Lösungen von (V)₂ gegen die Lösung eines Variationsproblems mit einem Mumford-Shah-Funktional nachweist.¹⁷⁾

Die zweite Möglichkeit zur Kantenerkennung im optischen Fluß besteht darin, zum Variationsproblem (V)₁ konvexe Restriktionen für die Gradienten ∇x_1 und ∇x_2 hinzuzufügen, womit (V)₁ in ein mehrdimensionales Steuerungsproblem vom Dieudonné-Rashevsky-Typ übergeht:

$$(P)_1: \quad F(x, u) = \int_{\Omega} \left(I_{s_1}(s) x_1(s) + I_{s_2}(s) x_2(s) + I_t(s) \right)^2 ds \quad (2.8)$$

$$+ \mu \cdot \int_{\Omega} r(s, u_{11}(s), u_{12}(s), u_{21}(s), u_{22}(s)) ds \longrightarrow \inf!; \quad (x, u) \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^4);$$

$$Jx(s) = \begin{pmatrix} u_{11}(s) & u_{12}(s) \\ u_{21}(s) & u_{22}(s) \end{pmatrix} \quad (\forall) s \in \Omega; \quad (2.9)$$

$$u \in U = \{ u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^4) \mid |u_{11}(s)|^q + |u_{12}(s)|^q + |u_{21}(s)|^q + |u_{22}(s)|^q \leq R^q \quad (\forall) s \in \Omega \}. \quad (2.10)$$

Hierin ist $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\mu > 0$ und $R > 0$. Die Funktion $r \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ kann wie in (V)₁ gewählt werden. Der Kantendetektor k wird unmittelbar aus den Steuervariablen u_{ij} aufgebaut, beispielsweise

$$k(s) = 1 - \frac{|u_{11}(s)|^q + |u_{12}(s)|^q + |u_{21}(s)|^q + |u_{22}(s)|^q}{\text{Max}_{s \in \Omega} \left(|u_{11}(s)|^q + |u_{12}(s)|^q + |u_{21}(s)|^q + |u_{22}(s)|^q \right)}. \quad (2.11)$$

¹⁶⁾ Vergleiche [WEICKERT/BROX 02].

¹⁷⁾ In Analogie zu [BELLETTINI/COSCIA 94], p. 202, und p. 205 f., Theorem 2.1.

(vergleiche (5.4) unten). Damit werden “Kanten” im optischen Fluß als diejenigen Teilmengen von Ω interpretiert, auf denen die Steuerbeschränkung nahezu aktiv wird. Es ist anzumerken, daß sich die zusätzliche Gradientenbeschränkung widerspruchsfrei in das Modell des optischen Flusses einfügt, indem nur eine Teilmenge möglicher Lösungen von (2.5) ausgeschlossen wird.

3. Mehrdimensionale Steuerungsprobleme vom Dieudonné-Rashevsky-Typ.

a) Gestalt der behandelten Aufgaben.

Wir betrachten mehrdimensionale Steuerungsprobleme der Gestalt

$$(P)_0: F(x, u) = \int_{\Omega} f(s, x(s), u(s)) ds \longrightarrow \inf!; \quad (x, u) \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^{nm}); \quad (3.1)$$

$$Jx(s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1}(s) & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial s_m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial s_1}(s) & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial s_m}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}(s) & \dots & u_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1}(s) & \dots & u_{nm}(s) \end{pmatrix} \quad (\forall) s \in \Omega; \quad (3.2)$$

$$u \in U = \{ u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^{nm}) \mid u(s) \in K \quad (\forall) s \in \Omega \} \quad (3.3)$$

und machen folgende Voraussetzungen über die Daten von $(P)_0$: Es sei $n \geq 1$, $m \geq 2$ und $1 < p < \infty$. $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei Abschluß eines beschränkten Lipschitzgebiets im strengen Sinne. Der Integrand $f(s, \xi, v) : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}$ sei bezüglich s meßbar und wesentlich beschränkt, nach allen ξ_i und v_{ij} stetig differenzierbar, und $K \subset \mathbb{R}^{nm}$ sei ein konvexer Körper mit $\mathbf{o} \in \text{int}(K)$. Aus den genannten Voraussetzungen ergibt sich unmittelbar die Existenz einer zulässigen Lösung (der Nulllösung). Ist (x, u) ein zulässiges Paar für $(P)_0$, so folgt aus $Jx(s) \in K \quad (\forall) s \in \Omega$ sogar $x \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, und x besitzt deshalb auch im Falle $1 < p \leq m$ einen Lipschitz-stetigen Repräsentanten.

b) Existenz globaler Minimallösungen.

Satz 3.1. *Wir betrachten die Aufgabe $(P)_0$ unter den Voraussetzungen von Abschnitt 3.a). Wenn der Integrand $f(s, \xi, v)$ für fast alle $s \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ als Funktion von v konvex ist und eine Wachstumsbedingung der Gestalt*

$$|f(s, \xi, v)| \leq \varphi_1(s) + \varphi_2(|\xi|, |v|) \quad (\forall) s \in \Omega \quad \forall (\xi, v) \in \mathbb{R}^n \times K \quad (3.4)$$

mit $\varphi_1 \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\varphi_1(s) \geq 0 \quad (\forall) s \in \Omega$, $\varphi_2 \in C^0(\mathbb{R}^n \times K, \mathbb{R})$, $\varphi_2(|\xi|, |v|) \geq 0 \quad \forall (\xi, v) \in \mathbb{R}^n \times K$ einhält, wobei φ_2 eine monoton wachsende Funktion sowohl in $|\xi|$ als auch in $|v|$ ist, dann besitzt $(P)_0$ eine globale Minimallösung.

Beweis: Der Beweis ergibt sich analog zu [PICKENHAIN/WAGNER 00], pp. 222 – 224, indem man beachtet, daß einerseits das loc. cit. betrachtete relaxierte Problem $(\bar{P})_0$ und die linear-konvexe Aufgabe $(P)_0$ isomorph sind, und andererseits nach [DACOROGNA 08], p. 378, Theorem 8.8., die schwach*-Unterhalbstetigkeit des Zielfunktional auch dann erhalten bleibt, wenn die Abhängigkeit des Integranden von s nur noch meßbar und wesentlich beschränkt ist. ■

Die Voraussetzungen von Satz 3.1. sind für alle in Kapitel 5 benutzten Integranden erfüllt, so daß die Existenz globaler Minimallösungen in den Steuerungsproblemen gesichert ist. Beispielsweise gilt für den Integranden

in (5.5) wegen der vorausgesetzten Lipschitz-Stetigkeit der Bilddaten (mit Lipschitzkonstante C) und der Äquivalenz der Normen im \mathbb{R}^r :

$$\begin{aligned} & \left| \left((I_{s_1}(s) \xi_1 + I_{s_2}(s) \xi_2 + I_t(s))^2 + \varepsilon \right)^{1/2} + \mu \left(\sum_{i,j=1}^2 |v_{ij}|^p + \varepsilon \right)^{1/p} \right| \leq \left(I_{s_1}^2(s) \xi_1^2 + I_{s_2}^2(s) \xi_2^2 + I_t^2(s) \right. \\ & \quad \left. + 2 |I_{s_1}(s) \xi_1 \cdot I_{s_2}(s) \xi_2 + I_{s_1}(s) \xi_1 \cdot I_t(s) + I_{s_2}(s) \xi_2 \cdot I_t(s)| + \varepsilon \right)^{1/2} + \mu \left(\sum_{i,j=1}^2 |v_{ij}|^p + \varepsilon \right)^{1/p} \quad (3.5) \\ & \leq \left(C^2 (1 + |\xi|^2) + 2C^2 (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2) + 2C^2 (|\xi_1| + |\xi_2|) + \varepsilon \right)^{1/2} + \mu \left(\sum_{i,j=1}^2 |v_{ij}|^p + \varepsilon \right)^{1/p} \\ & \leq \left(3C^2 (1 + |\xi|^2) + 2C^2 C_1 |\xi|^2 + \varepsilon \right)^{1/2} + \mu \left(\sum_{i,j=1}^2 C_p |v_{ij}|^2 + \varepsilon \right)^{1/p}, \quad (3.6) \end{aligned}$$

also ist die Wachstumsbedingung (3.4) mit $\varphi_1(s) \equiv 0$ und $\varphi_2(|\xi|, |v|) = \sqrt{(3C^2 + 2C^2 C_1)(1 + |\xi|^2) + \varepsilon} + \mu \sqrt[p]{C_p |v|^2 + \varepsilon}$ erfüllt. Damit ist die Anwendung direkter Methoden zur numerischen Lösung der Steuerungsprobleme $(P)_2 - (P)_4$ in Kapitel 5 prinzipiell gerechtfertigt.

c) Numerische Lösung mit direkten Methoden.

Bei der numerischen Lösung von Dieudonné-Rashevsky-Problemen folgen wir dem Prinzip ‘‘Diskretisierung und anschließende Optimierung’’. Hierzu wandeln wir das mehrdimensionale Steuerproblem $(P)_1$ nach dem Vorbild von MAURER et al.¹⁸⁾ in ein nichtlineares endlichdimensionales Optimierungsproblem um. Wir zerlegen Ω in $(K \times L)$ Pixel der Kantenlänge 1, und approximieren die partiellen Ableitungen der Bilddaten durch Vorwärts-Euler-Differenzenquotienten. Mit den Abkürzungen $I(s, t_N) = I^{(N)}(s)$, $I(s, t_{N+1}) = I^{(N+1)}(s)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} D_{kl}^{(s_1)} &= \frac{1}{6} \cdot \left(I^{(N)}(s_{k+1,l-1}) - I^{(N)}(s_{k,l-1}) + I^{(N)}(s_{k+1,l}) - I^{(N)}(s_{k,l}) + I^{(N)}(s_{k+1,l+1}) - I^{(N)}(s_{k,l+1}) \right. \\ & \quad \left. + I^{(N+1)}(s_{k+1,l-1}) - I^{(N+1)}(s_{k,l-1}) + I^{(N+1)}(s_{k+1,l}) - I^{(N+1)}(s_{k,l}) + I^{(N+1)}(s_{k+1,l+1}) - I^{(N+1)}(s_{k,l+1}) \right) \\ & \approx I_{s_1}(s_{kl}); \quad (3.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{kl}^{(s_2)} &= \frac{1}{6} \cdot \left(I^{(N)}(s_{k-1,l+1}) - I^{(N)}(s_{k-1,l}) + I^{(N)}(s_{k,l+1}) - I^{(N)}(s_{k,l}) + I^{(N)}(s_{k+1,l+1}) - I^{(N)}(s_{k+1,l}) \right. \\ & \quad \left. + I^{(N+1)}(s_{k-1,l+1}) - I^{(N+1)}(s_{k-1,l}) + I^{(N+1)}(s_{k,l+1}) - I^{(N+1)}(s_{k,l}) + I^{(N+1)}(s_{k+1,l+1}) - I^{(N+1)}(s_{k+1,l}) \right) \\ & \approx I_{s_2}(s_{kl}); \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{kl}^{(t)} &= \frac{1}{4} \cdot \left(I^{(N+1)}(s_{k,l}) - I^{(N)}(s_{k,l}) + I^{(N+1)}(s_{k+1,l}) - I^{(N)}(s_{k+1,l}) \right. \\ & \quad \left. + I^{(N+1)}(s_{k,l+1}) - I^{(N)}(s_{k,l+1}) + I^{(N+1)}(s_{k+1,l+1}) - I^{(N)}(s_{k+1,l+1}) \right) \approx I_t(s_{kl}). \quad (3.9) \end{aligned}$$

Definieren wir noch

$$\begin{aligned} J_{kl} & \left(x_{kl}^{(1)}, x_{kl}^{(2)}, u_{kl}^{(11)}, u_{kl}^{(12)}, u_{kl}^{(21)}, u_{kl}^{(22)} \right) \\ & = \left(D_{kl}^{(s_1)} x_{kl}^{(1)} + D_{kl}^{(s_2)} x_{kl}^{(2)} + D_{kl}^{(t)} \right)^2 + \mu \cdot r(u_{kl}^{(11)}, u_{kl}^{(12)}, u_{kl}^{(21)}, u_{kl}^{(22)}), \quad (3.10) \end{aligned}$$

¹⁸⁾ [MAURER/MITTELMANN 00], [MAURER/MITTELMANN 01], [THEISSEN 06].

so kann das diskretisierte Problem folgendermaßen notiert werden:

$$(D)_1: \tilde{F}(x_{11}^{(1)}, \dots, x_{KL}^{(1)}, x_{11}^{(2)}, \dots, x_{KL}^{(2)}, u_{11}^{(11)}, \dots, u_{KL}^{(11)}, u_{11}^{(12)}, \dots, u_{KL}^{(12)}, u_{11}^{(21)}, \dots, u_{KL}^{(21)}, u_{11}^{(22)}, \dots, u_{KL}^{(22)}) \\ = \frac{1}{4} \sum_{k=3}^{K-2} \sum_{l=3}^{L-2} \left(J_{k-1,l}(\dots) + J_{k,l}(\dots) + J_{k-1,l-1}(\dots) + J_{k,l-1}(\dots) \right) \longrightarrow \inf!; \quad (3.11)$$

$$(x_{11}^{(1)}, \dots, u_{KL}^{(22)}) \in \mathbb{R}^{6KL};$$

$$\begin{pmatrix} u_{kl}^{(11)} & u_{kl}^{(12)} \\ u_{kl}^{(21)} & u_{kl}^{(22)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+1,l}^{(1)} - x_{k,l}^{(1)} & x_{k,l+1}^{(1)} - x_{k,l}^{(1)} \\ x_{k+1,l}^{(2)} - x_{k,l}^{(2)} & x_{k,l+1}^{(2)} - x_{k,l}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \forall k, l; \quad (3.12)$$

$$|u_{kl}^{(11)}|^q + |u_{kl}^{(12)}|^q + |u_{kl}^{(21)}|^q + |u_{kl}^{(22)}|^q \leq R^q \quad \forall k, l. \quad (3.13)$$

Bei der Auswertung der notwendigen Optimalitätsbedingungen (Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen) für (D)₁ resultieren große nichtlineare Gleichungssysteme, die mit Innere-Punkte-Verfahren sehr genau und effizient gelöst werden können.¹⁹⁾ Im einzelnen sind wir folgendermaßen vorgegangen: Als Ein- und Ausgabeplattform wurde MATLAB benutzt. Das diskretisierte Problem wurde mit Hilfe der Modellierungssprache AMPL formuliert²⁰⁾ und aus MATLAB heraus an den Innere-Punkte-Solver IPOPT²¹⁾ übergeben. Die Ergebnisse wurden mit Hilfe von MATLAB in geeigneter Form präsentiert, bewertet und archiviert. Ein Konvergenzbeweis für das vorgestellte Verfahren bleibt einer späteren Veröffentlichung vorbehalten.

4. Visualisierung und Bewertung der Ergebnisse.

a) Die verwendeten Bilddaten.

Wir haben für unsere numerischen Experimente drei Bildfolgen verwendet: die Rotating Sphere Sequence,²²⁾ die New Marbled Block Sequence²³⁾ und die Hamburg Taxi Sequence.²⁴⁾ Die Rotating Sphere Sequence wurde künstlich erzeugt und zeigt eine Kugel, die vor einem gemusterten Hintergrund um die eigene Achse rotiert. Auch die Oberfläche der Kugel enthält Textur. Für diese Bildfolge stehen ground-truth-Daten zur Verfügung, auf die wir uns bei der Bewertung der Güte der Kantenerkennung beziehen können. Unsere Berechnungen beschreiben den Übergang von Bild #13 zu Bild #14 (siehe Abbildung 4.1. – 4.2).

In der ebenfalls künstlich erzeugten New Marbled Block Sequence bewegen sich zwei Marmorblöcke in unterschiedliche Richtungen, während ein dritter Block stillsteht. Die Szene wird durch mehrere Lichtquellen ausgeleuchtet, so daß die Blöcke mehrere, sich überlagernde Schatten werfen. Auch für diese Bildfolge stehen ground-truth-Daten zur Verfügung. Unsere Berechnungen beziehen sich auf den Übergang zwischen Bild

¹⁹⁾ Siehe z. B. [JANSEN 97].

²⁰⁾ AMPL ist eine kommerzielle mathematische Modellierungssprache, die es mit einer leicht verständlichen Syntax ermöglicht, ein Optimierungsproblem zu formulieren, einem Solver zu übergeben und dessen Ausgabe weiterzuverarbeiten. Siehe [FOURER/GAY/KERNIGHAN 02].

²¹⁾ [LAIRD/WÄCHTER 07], [WÄCHTER/BIEGLER 06].

²²⁾ Die Bildfolge wird in [McCANE/NOVINS/CRANNITCH/GALVIN 01] dokumentiert und ist elektronisch zugänglich unter <http://of-eval.sourceforge.net> (letzter Zugriff: 27.02.2008).

²³⁾ Elektronisch zugänglich unter http://i21www.ira.uka.de/image_sequences/download_tar.cgi?marmor_stat (letzter Zugriff: 27.02.2008).

²⁴⁾ Elektronisch zugänglich unter http://i21www.ira.uka.de/image_sequences/download_zip.cgi?taxi (letzter Zugriff: 27.02.2008).

#163 und Bild #164. Um mit einer vergleichbaren Anzahl von Bildpunkten rechnen zu können, beschränken wir uns in diesem Fall auf einen Ausschnitt (siehe Abbildung 4.5. – 4.6.).

Die Vorteile der beiden künstlichen Sequenzen liegen in der einfachen Struktur der Bilder und Bewegungen sowie in der Abwesenheit von Hintergrundrauschen. Damit eignen sich beide hervorragend für eine vergleichende Analyse von Verfahren mit simultaner Kantenerkennung. Als dritte Bildfolge verwenden wir die bekannte Hamburg Taxi Sequence, die auf eine reale Szene zurückgeht, und beziehen uns auf den Übergang zwischen Bild #22 und Bild #23 (siehe Abbildung 4.7. – 4.8.). Die Bilddaten dieser Folge sind mit vergleichsweise starkem Rauschen behaftet.

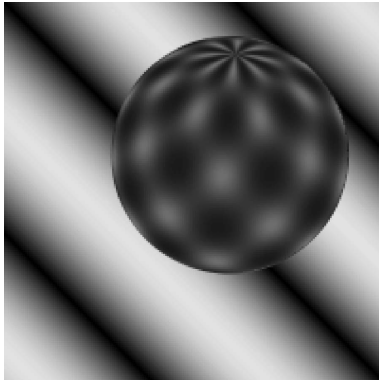


Abb. 4.1.

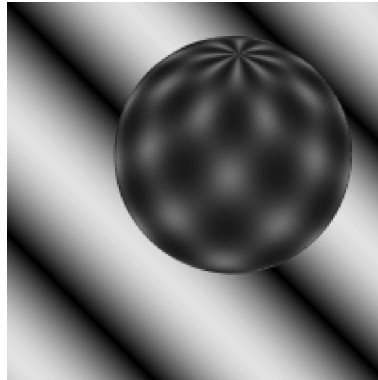


Abb. 4.2.

Rotating Sphere Sequence: Bilder #13 (links) und #14 (rechts)

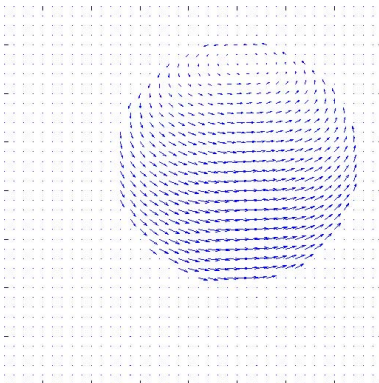


Abb. 4.3.

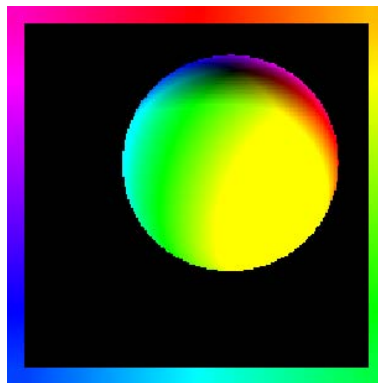


Abb. 4.4.

Rotating Sphere Sequence: Vektorplot (links) und farbiger Richtungsplot (rechts) der ground-truth-Daten \hat{x} für den Übergang von Bild #13 zu #14

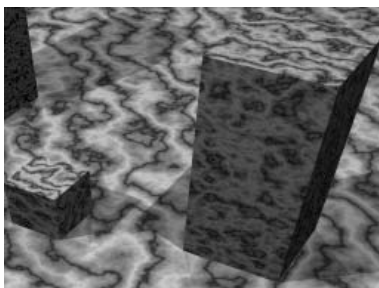


Abb. 4.5.

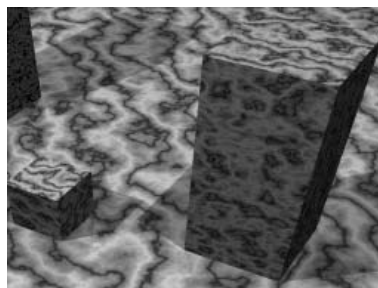


Abb. 4.6.

New Marbled Block Sequence: Ausschnitte aus den Bildern #163 (links) und #164 (rechts)



Abb. 4.7.



Abb. 4.8.

Hamburg Taxi Sequence: Bilder #22 (links) und #23 (rechts)

b) Visualisierung der Ergebnisse.

Die natürliche Visualisierung des optischen Flusses $(x_1(s), x_2(s))^T$ als Plot des Vektorfelds (siehe Abb. 4.3.) erscheint in vielen Fällen unübersichtlich. Aufschlußreicher ist oft die Darstellung als farbiger Richtungsplot (colorful orientation plot). Darin gibt die Farbe eines Pixels die Richtung des optischen Flusses an, während die Helligkeit durch den Betrag des jeweiligen Verschiebungsvektors festgelegt ist. Die Zuordnung zwischen Farbe und Orientierung kann an der farbigen Umrandung als Legende abgelesen werden (siehe Abb. 4.4.). In der vorliegenden Arbeit wurde diese Darstellung mit einem HSI-Farbmodell realisiert.²⁵⁾ In diesem Modell hat jede Farbe die drei Koordinaten Farbton (hue), Sättigung (saturation) und Helligkeit (intensity). Da wir zur Darstellung des optischen Flusses nur zwei Koordinaten benötigen, haben wir die Sättigung konstant gelassen. In Kapitel 4 werden wir unsere Ergebnisse jeweils mit einem farbigen Richtungsplot für den optischen Fluß $x(s)$ sowie einem Graustufenbild für die Kantenskizze $k(s)$ visualisieren.

c) Bewertungskriterien.

Als Gütekriterium für die Berechnung des optischen Flusses benutzen wir den “average angular error” (AAE), der aus dem ground-truth-Vektorfeld $\hat{x}(s)$ und dem berechneten Vektorfeld $x(s)$ wie folgt bestimmt wird:

$$AAE(\hat{x}, x) = \frac{1}{KL} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \arccos \left(\frac{\hat{x}_1(s_{kl}) x_1(s_{kl}) + \hat{x}_2(s_{kl}) x_2(s_{kl}) + 1}{\sqrt{(\hat{x}_1(s_{kl}))^2 + (\hat{x}_2(s_{kl}))^2 + 1} \sqrt{(x_1(s_{kl}))^2 + (x_2(s_{kl}))^2 + 1}} \right) \quad (4.1)$$

$$\approx \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \arccos \left(\frac{\hat{x}_1(s) x_1(s) + \hat{x}_2(s) x_2(s) + 1}{\sqrt{(\hat{x}_1(s))^2 + (\hat{x}_2(s))^2 + 1} \sqrt{(x_1(s))^2 + (x_2(s))^2 + 1}} \right) ds \quad (4.2)$$

für $(K \times L)$ Bildpunkte in der Diskretisierung. Das AAE-Kriterium hat sich in der Praxis durchgesetzt und wird, um Vergleichbarkeit zu gewährleisten, auch in der vorliegenden Arbeit verwendet.

Kriterien zur Bewertung von Kantenbildern k im optischen Fluß sind dagegen aus der Literatur bisher nicht bekannt. Wir schlagen daher zwei neue Bewertungskriterien vor, indem wir zwischen Bewegungs- und Intensitätskanten unterscheiden wollen. Zur Bewertung der Güte von Bewegungskanten ziehen wir die ground-truth-Daten \hat{x} der Bildfolge heran und stellen $|\hat{x}|$ als Graustufenbild G dar (flow field magnitude representation). Auf G wenden wir eine statische Kantenerkennung an und erhalten eine Kantenskizze k_m mit Werten in $[0, 1]$. Damit definieren wir folgendes Fehlermaß MEE:

²⁵⁾ Siehe [PLATANIOU/VENETSANOPOULOS 01], pp. 25 ff.

Definition 4.1. (motion edge error, MEE) Gegeben seien die Kantenskizze $k_m: \Omega \rightarrow [0, 1]$ zum normierten Betrag $|\hat{x}|$ der ground-truth-Daten und eine Kantenskizze $k: \Omega \rightarrow [0, 1]$ zum berechneten optischen Fluß x . Dann definieren wir

$$MEE(\hat{x}, x) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L (k_m(s_{kl}) - k(s_{kl}))^2 \approx \int_{\Omega} (k_m(s) - k(s))^2 ds \quad (4.3)$$

für $(K \times L)$ Bildpunkte in der Diskretisierung.

Ein Gütekriterium für Intensitätskanten erhalten wir, indem wir statische Kantenerkennung unmittelbar auf die Bilder $I(s, t_N)$ und $I(s, t_{N+1})$ anwenden. Dabei entstehen Kantenskizzen $k_g^{(N)}, k_g^{(N+1)}$ mit Werten in $[0, 1]$, die zur Definition eines weiteren Fehlermaßes IEE verwendet werden:

Definition 4.2. (intensity edge error, IEE) Gegeben seien die Kantenskizzen $k_g^{(N)}, k_g^{(N+1)}: \Omega \rightarrow [0, 1]$ zu den Graustufenbildern $I(s, t_N)$ bzw. $I(s, t_{N+1})$ und eine Kantenskizze $k: \Omega \rightarrow [0, 1]$ zum berechneten optischen Fluß x . Dann definieren wir

$$\begin{aligned} IEE(\hat{x}, x) &= \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \frac{1}{2} \left((k_g^{(N)}(s_{kl}) - k(s_{kl}))^2 + (k_g^{(N+1)}(s_{kl}) - k(s_{kl}))^2 \right) \\ &\approx \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left((k_g^{(N)}(s) - k(s))^2 + (k_g^{(N+1)}(s) - k(s))^2 \right) ds \end{aligned} \quad (4.4)$$

für $(K \times L)$ Bildpunkte in der Diskretisierung.

Mit Hilfe der zwei unterschiedlichen Bewertungskriterien können wir nachvollziehen, welche Verfahren Bewegungsgrenzen und welche Texturen auf Objekten hervorheben. Die Abbildungen 4.9. und 4.10. zeigen beispielhaft die Kantenbilder k_m und $k_g^{(N)}$ für unsere beiden Fehlermaße für den Übergang in der Rotating Sphere Sequence.

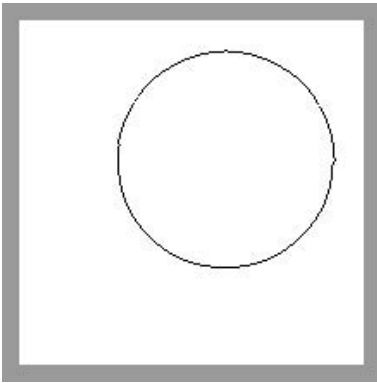


Abb. 4.9.

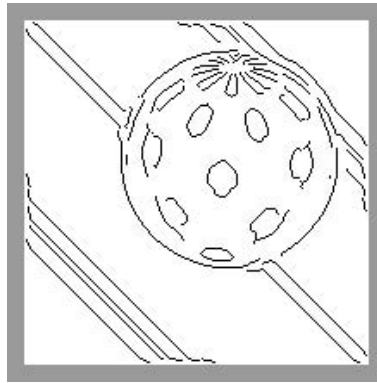


Abb. 4.10.

Rotating Sphere Sequence:
Kantenbilder k_m (links) und $k_g^{(N)}$ (rechts)

Zur Berechnung von k_m haben wir einen Sobel-Operator verwendet, zur Berechnung von $k_g^{(N)}$ und $k_g^{(N+1)}$ einen Canny-Detektor mit einem Schwellwert von 0.085 und Standardabweichung von 0.1 für das unterliegende Gaußfilter.

5. Numerische Resultate.

a) Erste Versuchsreihe: Zielfunktional ohne Regularisierungsterm.

In unserem ersten Experiment verzichten wir auf den Regularisierungsterm im Zielfunktional, um den unmittelbaren Einfluß einer Steuerbeschränkung studieren zu können. K ist der Normkörper der q -Norm im \mathbb{R}^4 . Das untersuchte Problem lautet:

$$(P)_2: F(x, u) = \int_{\Omega} \left(I_{s_1}(s) x_1(s) + I_{s_2}(s) x_2(s) + I_t(s) \right)^2 ds \longrightarrow \inf!; (x, u) \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^4); \quad (5.1)$$

$$Jx(s) = \begin{pmatrix} u_{11}(s) & u_{12}(s) \\ u_{21}(s) & u_{22}(s) \end{pmatrix} \quad (\forall) s \in \Omega; \quad (5.2)$$

$$|u_{11}(s)|^q + |u_{12}(s)|^q + |u_{21}(s)|^q + |u_{22}(s)|^q \leq R^q \quad (\forall) s \in \Omega; \quad (5.3)$$

als Kantendetektor verwenden wir

$$k(s) = 1 - \frac{|u_{11}(s)|^q + |u_{12}(s)|^q + |u_{21}(s)|^q + |u_{22}(s)|^q}{\text{Max}_{s \in \Omega} \left(|u_{11}(s)|^q + |u_{12}(s)|^q + |u_{21}(s)|^q + |u_{22}(s)|^q \right)}. \quad (5.4)$$

In der Versuchsreihe variieren wir die Parameter q und R (Art und Schärfe des Normkörpers) (siehe Abb. 5.1. – 5.6.). Wir stellen fest, dass die Beschränkung von $u = Jx$ durch einen Normkörper in gewissem Sinne mit einer Regularisierung vergleichbar ist. Die glättende Wirkung der Steuerbeschränkung ist im Verlauf von Abb. 5.1. – 5.6. gut nachzuvollziehen, andererseits zeigt sich, daß die Güte der Kantenerkennung sehr stark von R abhängt. Eine scharfe Beschränkung bewirkt eine starke, gleichmäßige Regularisierung des optischen Flusses, und die Kanten sind überall dort kräftig zu sehen, wo regularisiert wurde. Wählen wir dagegen einen relativ großen Normkörper, z. B. $R = 4$ (Abbildung 5.1.), so wird kaum regularisiert, und das Kantenbild wirkt schwächer. Ist man verstärkt an Intensitätskanten, d. h. an der Textur von bewegten Objekten interessiert, so bietet dieses Experiment einen möglichen Ansatz. Ein analoges Verhalten zeigt sich auch für unterschiedliche Arten des Normkörpers, d. h. bei Variation von q .²⁶⁾ Anzumerken ist, daß die Maximumfunktion in (5.4) innerhalb von AMPL zur Verfügung gestellt wird.

b) Zweite Versuchsreihe: Zielfunktional mit L^p -Regularisierungsterm, $p > 1$.

Im zweiten Experiment interessieren wir uns vorrangig für die Erkennung von Bewegungskanten im optischen Fluß und betrachten daher ein Zielfunktional mit einem sog. robusten Datenterm und einem isotropen, flußgetriebenen Regularisierungsterm.²⁷⁾ K ist wiederum der Normkörper der q -Norm im \mathbb{R}^4 . Das untersuchte Problem lautet:

$$(P)_3: F(x, u) = \int_{\Omega} \left(\left(I_{s_1}(s) x_1(s) + I_{s_2}(s) x_2(s) + I_t(s) \right)^2 + \varepsilon \right)^{1/2} ds + \mu \cdot \int_{\Omega} \left(|u_{11}(s)|^p + |u_{12}(s)|^p + |u_{21}(s)|^p + |u_{22}(s)|^p + \varepsilon \right)^{1/p} ds \longrightarrow \inf!; (x, u) \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^4); \quad (5.5)$$

$$Jx(s) = \begin{pmatrix} u_{11}(s) & u_{12}(s) \\ u_{21}(s) & u_{22}(s) \end{pmatrix} \quad (\forall) s \in \Omega; \quad (5.6)$$

$$|u_{11}(s)|^q + |u_{12}(s)|^q + |u_{21}(s)|^q + |u_{22}(s)|^q \leq R^q \quad (\forall) s \in \Omega; \quad (5.7)$$

²⁶⁾ [BRUNE 07], pp. 104 f. und 124.

²⁷⁾ Vergleiche [BRUHN/WEICKERT/SCHNÖRR 05], p. 217, [BRUHN/WEICKERT/KOHLBERGER/SCHNÖRR 06], p. 261 f., und [BRUNE 07], p. 94.

als Kantendetektor verwenden wir (5.8)

$$k(s) = \frac{\kappa(s)}{\text{Max}_{s \in \Omega} \kappa(s)} \cdot \begin{cases} 1 & \kappa(s) \geq \alpha R^q; \\ 0 & \kappa(s) < \alpha R^q \end{cases} \quad \text{mit } \kappa(s) = |u_{11}(s)|^q + |u_{12}(s)|^q + |u_{21}(s)|^q + |u_{22}(s)|^q.$$

Unser mehrdimensionales Steuerungsproblem enthält fünf Parameter. Die Wahl des Robustheitsparameters $\varepsilon > 0$ ist für die Rechnungen mit den unverrauschten Daten der Rotating Sphere Sequence von vergleichsweise geringer Bedeutung. $p > 1$ und $\mu > 0$ legen die Art und Stärke der Regularisierung fest; q und R bestimmen wie in Abschnitt 5.a) Art und Schärfe des Normkörpers, der die Gradienten des optischen Flusses beschränkt. In der Definition des Kantendetektors tritt ein weiterer Parameter α auf, der als Schwellwert aufgefaßt werden kann. Aus der Fülle der in [BRUNE 07] dokumentierten Experimente präsentieren wir eine Folge von Rechnungen, bei denen zu festen ε , μ , p und q nur R variiert (Abb. 5.7. – 5.14.). Zum letzten Ergebnis zeigen wir drei Kantenskizzen für verschiedene α (Abb. 5.14., 5.16. und 5.18.). Regularisierungsterm und Steuerbeschränkung wirken hier gleichzeitig glättend; für große R (in der dargestellten Versuchsreihe für $R > 2$) fällt die Steuerbeschränkung entsprechend weniger ins Gewicht. Bei Versuchen mit “adjungierten” Parametern $p \neq 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, konnten deutliche Verbesserungen in bezug auf Konvergenz und Ergebnisqualität nicht festgestellt werden.²⁸⁾

c) Dritte Versuchsreihe: Zielfunktional mit L^1 -Regularisierungsterm.

Die Reformulierung des optical-flow-Problems als mehrdimensionales Steuerungsproblem erlaubt eine direkte Behandlung von Aufgaben mit L^1 - bzw. TV-Regularisierungstermen.²⁹⁾ Dazu zerlegen wir die Steuervariablen wie folgt:³⁰⁾

$$u_{ij}(s) = u_{ij}^+(s) - u_{ij}^-(s) \quad \text{mit } u_{ij}^+(s) \geq 0, u_{ij}^-(s) \geq 0 \quad (\forall) s \in \Omega \implies \quad (5.9)$$

$$|u_{ij}(s)| = u_{ij}^+(s) + u_{ij}^-(s) \quad (\forall) s \in \Omega. \quad (5.10)$$

Es entsteht folgendes Steuerungsproblem mit einem 1-Normkörper:

$$(P)_4: \quad F(x, u) = \int_{\Omega} \left((I_{s_1}(s)x_1(s) + I_{s_2}(s)x_2(s) + I_t(s))^2 + \varepsilon \right)^{1/2} ds \quad (5.11)$$

$$+ \mu \cdot \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 (u_{ij}^+(s) + u_{ij}^-(s)) ds \longrightarrow \inf!; \quad (x, u) \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^8);$$

$$Jx(s) = \begin{pmatrix} u_{11}^+(s) - u_{11}^-(s) & u_{12}^+(s) - u_{12}^-(s) \\ u_{21}^+(s) - u_{21}^-(s) & u_{22}^+(s) - u_{22}^-(s) \end{pmatrix} \quad (\forall) s \in \Omega; \quad (5.12)$$

$$\sum_{i,j=1}^2 (u_{ij}^+(s) + u_{ij}^-(s)) \leq R \quad (\forall) s \in \Omega; \quad (5.13)$$

$$u_{ij}^+(s), u_{ij}^-(s) \geq 0 \quad (\forall) s \in \Omega, \quad 1 \leq i, j \leq 2. \quad (5.14)$$

Dabei wurde wiederum ein robuster Datenterm gewählt. Als Kantendetektor verwenden wir

$$k(s) = 1 - \frac{\sum_{i,j=1}^2 (u_{ij}^+(s) + u_{ij}^-(s))}{\text{Max}_{s \in \Omega} \sum_{i,j=1}^2 (u_{ij}^+(s) + u_{ij}^-(s))}. \quad (5.15)$$

²⁸⁾ [BRUNE 07], pp. 108 und 124.

²⁹⁾ Entsprechende Aufgaben werden in der Literatur numerisch entweder durch Übergang zum Dualproblem oder Ersetzung des L^1 -Regularisierungsterms durch $\int_{\Omega} \sqrt{|\nabla x_1(t)|^2 + |\nabla x_2(t)|^2} + \varepsilon dt$ gelöst, siehe [CHAMBOLLE 04], [HE/BURGER/OSHER 06] und die oben in Anmerkung 14 zitierten Arbeiten.

³⁰⁾ Vergleiche [SETHI/THOMPSON 06], p. 121 f., sowie [VOSSEN/MAURER 06], p. 307, (16), wo dieselbe Zerlegung zur numerischen Lösung eindimensionaler Steuerungsprobleme mit L^1 -Norm im Zielfunktional angewendet wurde.

Einige Ergebnisse sind in Abb. 5.19. – 5.24. dargestellt. Bedingt durch die L^1 - bzw. TV-Regularisierung, erhalten wir eine vorzügliche, im Vergleich zur zweiten Versuchsreihe schärfere Darstellung der Bewegungskanten (vergleiche z. B. Abb. 5.12. und Abb. 5.20.). Gleichzeitig macht sich der typische Staircasing-Effekt bemerkbar.

d) Abbildungen.

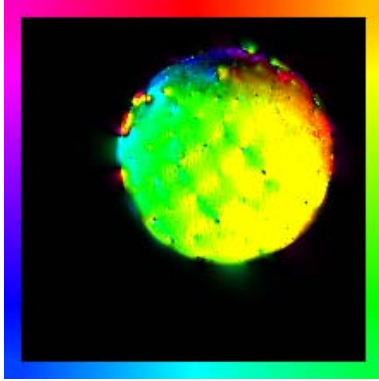


Abb. 5.1.

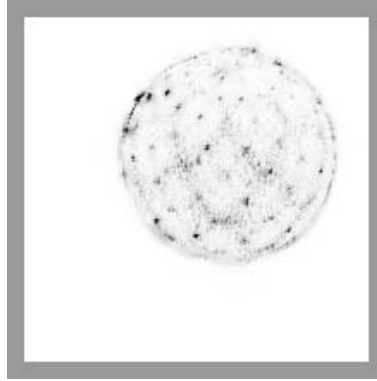


Abb. 5.2.

Erste Versuchsreihe:

$$q = 2, R = 4$$

$$AAE = 4.11,$$

$$MEE = 2.16, IEE = 4.40$$

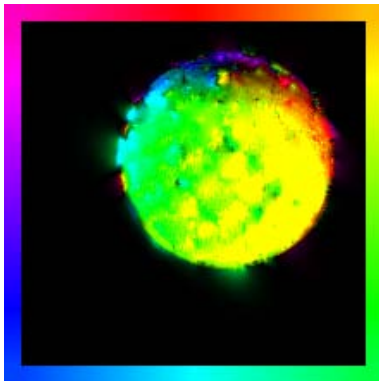


Abb. 5.3.



Abb. 5.4.

Erste Versuchsreihe:

$$q = 2, R = 0.5$$

$$AAE = 4.22,$$

$$MEE = 7.25, IEE = 7.89$$

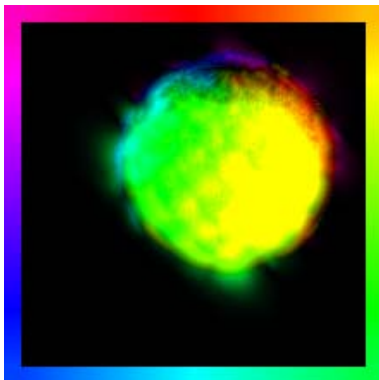


Abb. 5.5.

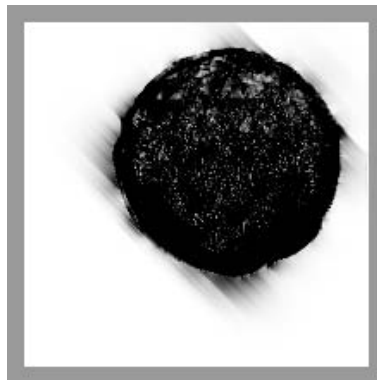


Abb. 5.6.

Erste Versuchsreihe:

$$q = 2, R = 0.125$$

$$AAE = 4.15,$$

$$MEE = 11.04, IEE = 11.12$$

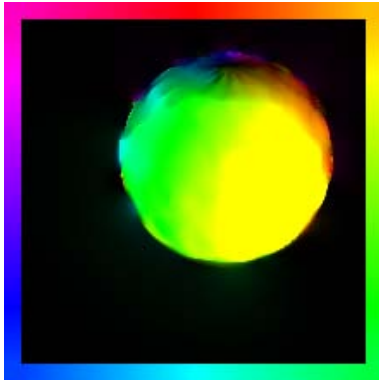


Abb. 5.7.



Abb. 5.8.

Zweite Versuchsreihe:
 $\varepsilon = 0.001$, $\mu = 0.001$, $p = 2$,
 $q = 2$, $R = 4$, $\alpha = 0$

$AAE = 3.08$,
 $MEE = 1.89$, $IEE = 4.28$

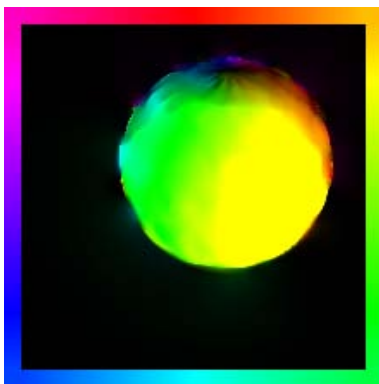


Abb. 5.9.



Abb. 5.10.

Zweite Versuchsreihe:
 $\varepsilon = 0.001$, $\mu = 0.001$, $p = 2$,
 $q = 2$, $R = 2$, $\alpha = 0$

$AAE = 3.07$,
 $MEE = 1.89$, $IEE = 4.28$

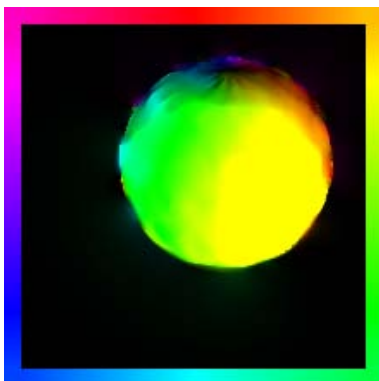


Abb. 5.11.



Abb. 5.12.

Zweite Versuchsreihe:
 $\varepsilon = 0.001$, $\mu = 0.001$, $p = 2$,
 $q = 2$, $R = 1$, $\alpha = 0$

$AAE = 3.08$,
 $MEE = 2.19$, $IEE = 4.37$

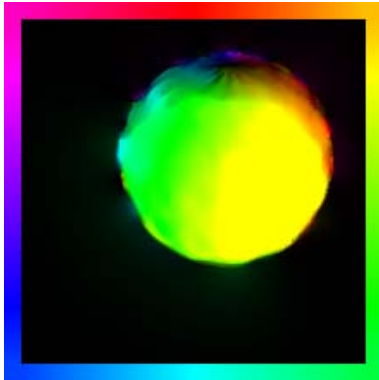


Abb. 5.13.



Abb. 5.14.

Zweite Versuchsreihe:
 $\varepsilon = 0.001$, $\mu = 0.001$, $p = 2$,
 $q = 2$, $R = 0.5$, $\alpha = 0$

$AAE = 3.23$,
 $MEE = 3.03$, $IEE = 4.72$

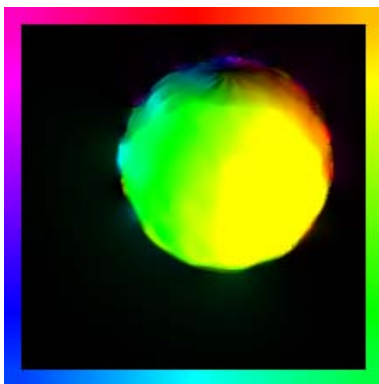


Abb. 5.15.

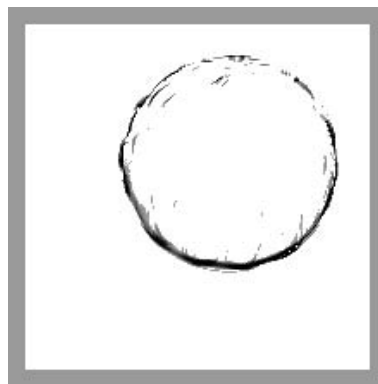


Abb. 5.16.

Zweite Versuchsreihe:
 $\varepsilon = 0.001$, $\mu = 0.001$, $p = 2$,
 $q = 2$, $R = 0.5$, $\alpha = 0.1$

$AAE = 3.23$,
 $MEE = 2.87$, $IEE = 4.78$

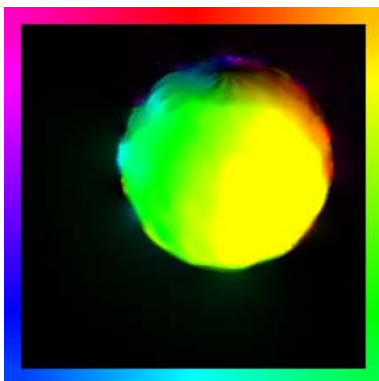


Abb. 5.17.

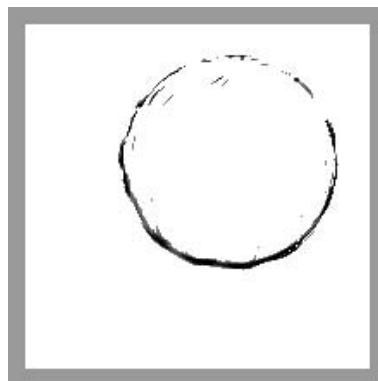


Abb. 5.18.

Zweite Versuchsreihe:
 $\varepsilon = 0.001$, $\mu = 0.001$, $p = 2$,
 $q = 2$, $R = 0.5$, $\alpha = 0.2$

$AAE = 3.23$,
 $MEE = 2.82$, $IEE = 4.78$

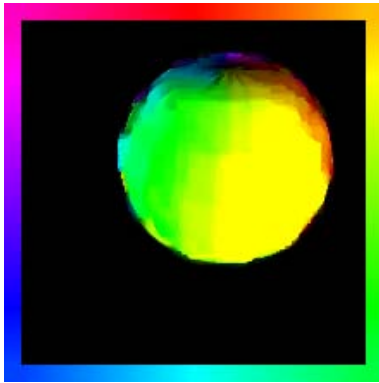


Abb. 5.19.

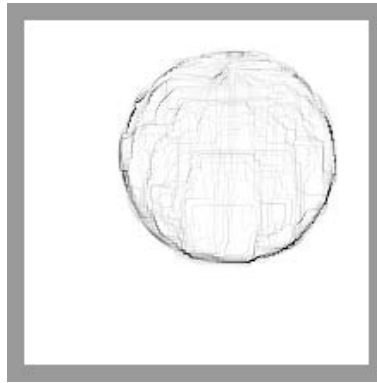


Abb. 5.20.

Dritte Versuchsreihe:
 $\varepsilon = 0.001$, $\mu = 0.002$, $R = 2$

$AAE = 2.57$,
 $MEE = 2.11$, $IEE = 4.38$



Abb. 5.21.

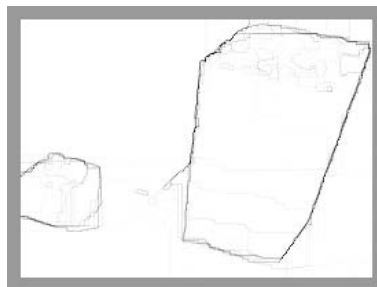


Abb. 5.22.

Dritte Versuchsreihe:
 $\varepsilon = 0.001$, $\mu = 0.07$, $R = 2$

$AAE = 6.44$,
 $MEE = 2.87$, $IEE = 8.84$

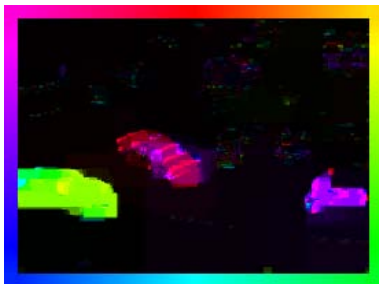


Abb. 5.23.

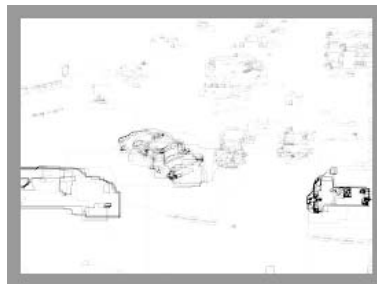


Abb. 5.24.

Dritte Versuchsreihe:
 $\varepsilon = 0.001$, $\mu = 0.01$, $R = 2$

Angabe von AAE , MEE und IEE nicht möglich, da zur Hamburg Taxi Sequence keine ground-truth-Daten vorhanden sind

e) Zusammenfassung der Ergebnisse.

Unsere Experimente zeigen, daß die Berechnung des optischen Flusses mit simultaner Kantenerkennung im Rahmen eines mehrdimensionalen Steuerungsproblems eine echte Alternative zum Ambrosio-Tortorelli-Ansatz der Variationsrechnung darstellt.³¹⁾ Obwohl die Hinzunahme eine Steuerbeschränkung schon für sich genommen einen regularisierenden Effekt hervorbringt, erweist es sich als vorteilhaft, gleichzeitig auch im Zielfunktional einen Regularisierungsterm zu berücksichtigen. Ein Vorteil des vorgeschlagenen Zugangs besteht in der Möglichkeit, den Kantendetektor k über weitere Parameter modifizieren und anpassen zu können. Die Steuerungsformulierung ermöglicht außerdem eine primale Auswertung von TV-Regularisierungstermen durch Zerlegung in vorzeichenbeschränkte Steuervariablen.

³¹⁾ Beispielsweise ergibt die numerische Lösung von $(V)_2$ mit einer indirekten Methode für den Übergang in der Rotating Sphere Sequence mit $\varepsilon = 0.005$, $c_1(\varepsilon) = 1250$, $c_2(\varepsilon) = 3$, $c_3(\varepsilon) = 1$ und $c_4(\varepsilon) = 0$: $AAE = 2.99$, $MEE = 1.89$, $IEE = 4.30$. Siehe [BRUNE 07], p. 82.

Literaturverzeichnis.

1. [AMBROSIO/TORTORELLI 90] Ambrosio, L.; Tortorelli, V. M.: *Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ -convergence*. Comm. Pure Appl. Math. **43** (1990), 999 – 1036
2. [AMBROSIO/TORTORELLI 92] Ambrosio, L.; Tortorelli, V. M.: *On the approximation of free discontinuity problems*. Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **6** (1992), 105 – 123
3. [AUBERT/DERICHE/KORNPLOBST 99] Aubert, G.; Deriche, R.; Kornprobst, P.: *Computing optical flow via variational techniques*. SIAM J. Appl. Math. **60** (1999), 156 – 182
4. [AUBERT/KORNPLOBST 02] Aubert, G.; Kornprobst, P.: *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. Springer; New York etc. 2002
5. [BELLETTINI/COSCIA 94] Bellettini, G.; Coscia, A.: *Discrete approximation of a free discontinuity problem*. Numer. Funct. Anal. Optim. **15** (1994), 201 – 224
6. [BOURDIN 99] Bourdin, B.: *Image segmentation with a finite element method*. M2AN Mathematical Modelling and Numerical Analysis **33** (1999), 229 – 244
7. [BROX/BRUHN/WEICKERT 06] Brox, T.; Bruhn, A.; Weickert, J.: *Variational motion segmentation with level sets*. In: Bischof, H.; Leonardis, A.; Pinz, A. (Hrsg.): Computer Vision — ECCV 2006. Springer; Berlin etc. 2006 (Lecture Notes in Computer Science 3951), 471 – 483
8. [BRUHN/WEICKERT/KOHLBERGER/SCHNÖRR 06] Bruhn, A.; Weickert, J.; Kohlberger, T.; Schnörr, C.: *A multi-grid platform for real-time motion computation with discontinuity-preserving variational methods*. Int. J. Computer Vision **70** (2006), 257 – 277
9. [BRUHN/WEICKERT/SCHNÖRR 05] Bruhn, A.; Weickert, J.; Schnörr, C.: *Lucas/Kanade meets Horn/Schunck: Combining local and global optic flow methods*. Int. J. of Computer Vision **61** (2005), 211 – 231
10. [BRUNE 07] Brune, C.: *Berechnung des Optischen Flusses und Kantenerkennung mit Optimierungsmethoden*. Diplomarbeit; Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 2007
11. [CHAMBOLLE 04] Chambolle, A.: *An algorithm for total variation minimization and applications*. J. Math. Imaging Vision **20** (2004), 89 – 97
12. [DACOROGNA 08] Dacorogna, B.: *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Springer; New York etc. 2008, 2. Aufl.
13. [DEWESS/HELBIG 95] Deweiß, G.; Helbig, P.: *Einschätzen und Optimieren von Verkehrsflüssen*. In: Bachem, A.; Jünger, M.; Schrader, R. (Hrsg.): Mathematik in der Praxis. Fallstudien aus Industrie, Wirtschaft, Naturwissenschaften und Medizin. Springer; Berlin etc. 1995, 473 – 492
14. [ENKELMANN 88] Enkelmann, W.: *Investigations of multigrid algorithms for the estimation of optical flow fields in image sequences*. Computer Vision, Graphics, and Image Processing **43** (1988), 150 – 177
15. [EVANS/GARIEPY 92] Evans, L. C.; Gariepy, R. F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press; Boca Raton etc. 1992
16. [FOURER/GAY/KERNIGHAN 02] Fourer, R.; Gay, D. M.; Kernighan, B. W.: *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*. Duxbury Press / Brooks/Cole; 2002, 2. Aufl.
17. [FRANEK/FRANEK/MAURER/WAGNER 08] Franek, L.; Franek, M.; Maurer, H.; Wagner, M.: *Image denoising and edge detection with a gradient constraint*. In Vorbereitung.
18. [GANDHI/DEVADIGA/KASTURI/CAMPS 00] Gandhi, T.; Devadiga, S.; Kasturi, R.; Camps, O.: *Detection of obstacles on runways using ego-motion compensation and tracking of significant features*. Image and Vision Computing **18** (2000), 805 – 815
19. [GROSSAUER 06] Grossauer, H.: *Inpainting of movies using optical flow*. In: Scherzer, O. (Hrsg.): Mathematical Models for Registration and Applications to Medical Imaging. Springer; Berlin etc. 2006 (Mathematics in Industry 10), 151 – 162
20. [HE/BURGER/OSHER 06] He, L.; Burger, M.; Osher, S. J.: *Iterative total variation regularization with non-quadratic fidelity*. J. Math. Imaging Vision **26** (2006), 167 – 184

-
21. [HINTERBERGER/SCHERZER 01] Hinterberger, W.; Scherzer, O.: *Models for image interpolation based on the optical flow*. Computing **66** (2001), 231 – 247
 22. [HINTERBERGER/SCHERZER/SCHNÖRR/WEICKERT 02] Hinterberger, W.; Scherzer, O.; Schnörr, C.; Weickert, J.: *Analysis of optical flow models in the framework of the calculus of variations*. Num. Funct. Anal. Optim. **23** (2002), 69 – 89
 23. [HORN/SCHUNCK 81] Horn, B. K. P.; Schunck, B. G.: *Determining optical flow*. Artificial Intelligence **17** (1981), 185 – 203
 24. [JANSEN 97] Jansen, B.: *Interior Point Techniques in Optimization*. Kluwer; Dordrecht 1997
 25. [JUNG/SUKHATME 05] Jung, B.; Sukhatme, G. S.: *Real-time motion tracking from a mobile robot*. University of Southern California, Center for Robotics and Embedded Systems, Technical Report CRES-05-008
 26. [KORNPROBST/DERICHE/AUBERT 99] Kornprobst, P.; Deriche, R.; Aubert, G.: *Image sequence analysis via partial differential equations*. J. Math. Imaging Vision **11** (1999), 5 – 26
 27. [KUMAR/HAKER/STILLMAN/CURRY/GIDDENS/TANNENBAUM/YEZZI 01] Kumar, A.; Haker, S.; Stillman, A.; Curry, C. W.; Giddens, D. P.; Tannenbaum, A. R.; Yezzi, A.: *Total-variational-based optical flow for cardiac-wall motion tracking*. In: Sonka, M.; Hanson, K. M. (Hrsg.): *Medical Imaging 2001: Image Processing* (Proceedings of SPIE 4322). SPIE — International Society for Optical Engineering; Bellingham 2001, 1550 – 1553
 28. [LAIRD/WÄCHTER 07] Laird, C.; Wächter, A.: *Introduction to IPOPT: A tutorial for downloading, installing, and using IPOPT. Revision No. 1024*. Elektronisch veröffentlicht unter <http://www.coin-or.org/Ipopt/documentation/> (Zugriff am 29. 01. 2008)
 29. [MAURER/MITTELMANN 00] Maurer, H.; Mittelmann, H. D.: *Optimization techniques for solving elliptic control problems with control and state constraints: Part 1. Boundary control*. Comp. Optim. Appl. **16** (2000), 29 – 55
 30. [MAURER/MITTELMANN 01] Maurer, H.; Mittelmann, H. D.: *Optimization techniques for solving elliptic control problems with control and state constraints: Part 2: Distributed control*. Comp. Optim. Appl. **18** (2001), 141 – 160
 31. [MCCANE/NOVINS/CRANNITCH/GALVIN 01] McCane, B.; Novins, K.; Crannitch, D.; Galvin, B.: *On benchmarking optical flow*. Computer Vision and Image Understanding **84** (2001), 126 – 143
 32. [NESI 93] Nesi, P.: *Variational approach to optical flow estimation managing discontinuities*. Image and Vision Computing **11** (1993), 419 – 439
 33. [PAPENBERG/BRUHN/BROX/DIDAS/WEICKERT 06] Papenberg, N.; Bruhn, A.; Brox, T.; Didas, S.; Weickert, J.: *Highly accurate optic flow computation with theoretically justified warping*. Int. J. Computer Vision **67** (2006), 141 – 158
 34. [PICKENHAIN/WAGNER 00] Pickenhain, S.; Wagner, M.: *Critical points in relaxed deposit problems*. In: Ioffe, A.; Reich, S.; Shafir, I. (Hrsg.): *Calculus of Variations and Optimal Control*, Technion 98, Vol. II (Research Notes in Mathematics, Vol. 411). Chapman & Hall / CRC Press; Boca Raton etc. 2000, 217 – 236
 35. [PLATANIOTIS/VENETSANOPOULOS 01] Plataniotis, K. N.; Venetsanopoulos, A. N.: *Color Image Processing and Applications*. Springer; Berlin etc. 2001
 36. [SCHERZER/GRASMAIR/GROSSAUER/HALTMEIER/LENZEN 07] Scherzer, O.; Grasmair, M.; Grossauer, H.; Haltmeier, M.; Lenzen, F.: *Variational Methods in Imaging*. Unveröffentlichtes Manuskript, 271 pp. (to appear: Springer-Verlag)
 37. [SETHI/THOMPSON 06] Sethi, S. P.; Thompson, G. L.: *Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics*. Springer; New York etc. 2006, 2. Aufl.
 38. [SLESAREVA/BRUHN/WEICKERT 05] Slesareva, N.; Bruhn, A.; Weickert, J.: *Optic flow goes stereo: a variational method for estimating discontinuity-preserving dense disparity maps*. In: Kropatsch, W.; Sablatnig, R.; Hanbury, A. (Hrsg.): *Pattern Recognition. 27th DAGM Symposium, Vienna, Austria, August 31 - September 2, 2005*, Proceedings. Springer; Berlin etc. 2005 (Lecture Notes in Computer Science 3663), 33 – 40
 39. [TALUKDER/MATTHIES 04] Talukder, A.; Matthies, L.: *Real-time detection of moving objects for moving vehicles using dense stereo and optical flow*. In: *Proceedings of 2004 IEEE/RSJ Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Sendai, Japan, 28 September – 2 October, 2004, Vol. IV. Institute of Electrical and Electronic Engineers Inc.; Piscataway 2004, 3718 – 3725

-
40. [THEISSEN 06] Theißen, K.: *Optimale Steuerprozesse unter partiellen Differentialgleichungs-Restriktionen mit linear eingehender Steuerfunktion*. Dissertation; Westfälische Wilhelms-Universität Münster 2006
 41. [VOSSEN/MAURER 06] Vossen, G.; Maurer, H.: *On L^1 -minimization in optimal control and applications to robotics*. Optim. Control Appl. Meth. **27** (2006), 301 – 321
 42. [WÄCHTER/BIEGLER 06] Wächter, A.; Biegler, L. T.: *On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming*. Math. Program., Ser. A **106** (2006), 25 – 57
 43. [WAGNER 07] Wagner, M.: *Pontryagin's maximum principle for multidimensional control problems in image processing. Updated version*. Brandenburgische Technische Universität Cottbus, Preprint-Reihe Mathematik, Preprint M-10/2007 (to appear: J. Optim. Theory Appl.)
 44. [WEICKERT/BROX 02] Weickert, J.; Brox, T.: *Diffusion and regularization of vector- and matrix-valued images*. In: Zuhair Nashed, M.; Scherzer, O. (Hrsg.): *Inverse Problems, Image Analysis, and Medical Imaging*. AMS; Providence 2002 (Contemporary Mathematics, 313), 251 – 268
 45. [WEICKERT/SCHNÖRR 01] Weickert, J.; Schnörr, C.: *A theoretical framework for convex regularizers in PDE-based computation of image motion*. Int. J. Computer Vision **45** (2001), 245 – 264

Zuletzt geändert: 27.02.2008

Anschriften / e-Mail: *Christoph Brune:* Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Einsteinstr. 62, D-48149 Münster. e-Mail: christoph.brune@uni-muenster.de

Helmut Maurer: Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Einsteinstr. 62, D-48149 Münster. e-Mail: maurer@math.uni-muenster.de

Marcus Wagner: Chaire d'Analyse Mathématique et Applications, IACS, Bâtiment de Mathématiques, Station 8, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, CH-1015 Lausanne.

Homepage / e-mail: www.thecityto come.de / marcus.wagner@epfl.ch