Übungen zur Einführung in die Theorie der Operatoralgebren **WS 2009/10**
Prof. Dr. J. Cuntz **Blatt 1**

Abgabe: Donnerstag, 22. Oktober 2009

Aufgabe 1:
Sei A eine C^*-Algebra und $x \in A$ normal. Zeige, dass $r(x) = \|x\|$.

Aufgabe 2:
Sei A eine C^*-Algebra mit Eins und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.
Sei weiter $\{y_n\}$ eine Folge von normalen Elementen in A, die gegen y konvergiert.
Zeige, dass y normal ist und dass $f(y_n) \to f(y)$.

Aufgabe 3:
Sei X ein lokalkompakter Raum.
Auf der Menge $X^+ = X \cup \{\infty\}$ sei eine Topologie dadurch definiert, dass $U \subset X^+$ eine Umgebung von $x \in X$ ist, genau dann, wenn $U \cap X$ eine Umgebung von x ist, und dass U eine Umgebung von ∞ ist genau dann, wenn U das Komplement einer kompakten Menge in X enthält.
Zeige, dass X^+ kompakt ist und dass $C_0(X)^{\sim} \cong C(X^+)$.

Aufgabe 4:
Sei a ein Element einer C^*-Algebra und $x = \mathrm{Re}\ a, y = \mathrm{Im}\ a$ (also $x = \frac{1}{2}(a + a^*), y = \frac{1}{2i}(a - a^*)$), so dass also $a = x + iy$.
Zeige, dass a normal ist genau dann, wenn $xy = yx$.