

Abgabe: Dienstag, 15. Dezember 2009

Aufgabe 1:

Sei A eine C^* -Algebra und $x \in A$. Zeige, dass $\text{Sp } |x| \cup \{0\} = \text{Sp } |x^*| \cup \{0\}$, und dass für alle $f \in \mathbb{C}_0(\text{Sp } |x|)$ gilt:

$$f(|x^*|)x = xf(|x|).$$

Aufgabe 2:

Sei A eine C^* -Algebra. Eine (unbeschränkte) Spur auf A ist eine Funktion $\tau : A_+ \rightarrow [0, \infty]$, so dass

$$\tau(a + b) = \tau(a) + \tau(b), \tau(\lambda a) = \lambda\tau(a), \tau(c^*c) = \tau(cc^*), a, b \in A_+, \lambda \in \mathbb{R}_+, c \in A.$$

Sei $J = \{a \in A \mid \tau(a^*a) < \infty\}$.

Zeige, dass $(a + b)^*(a + b) \leq 2a^*a + 2b^*b$ und $(ab)^*ab \leq \|a\|^2b^*b$ und folgere, dass J ein selbstadjungiertes Ideal in A ist.

Sei weiter I der lineare Teilraum, der von allen Produkten ab mit $a, b \in J$ erzeugt wird. Zeige, dass I ein selbstadjungiertes Ideal in A ist.

Sei $I_+ = \{a \in A_+ \mid \tau(a) < \infty\}$. Zeige, dass I das lineare Erzeugnis von I_+ ist und dass $I_+ = I \cap A_+$ (benutze die Polarisierungsidentität, um a^*b als Linearkombination von Elementen der Form x^*x darzustellen).

Zeige, dass τ eine eindeutige Fortsetzung zu einem linearen Funktional τ auf I besitzt und dass $\tau(ax) = \tau(xa)$ für alle $x \in I, a \in A$.

Aufgabe 3:

Sei $M \subset \mathcal{L}(H)$ eine von Neumann Algebra. Ein Vektor $\xi \in H$ heißt zyklisch für M , falls $\overline{M\xi} = H$ und separierend für M , falls: $a\xi = 0, a \in M \Rightarrow a = 0$.

Zeige, dass ein Vektor ξ zyklisch für M ist genau dann, wenn er separierend für M' ist.