

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I, WS 2006/07
Blatt 11

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. (a) Wiederholen Sie die Definitionen für die Funktionenlimiten $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$).

(b) Formulieren und begründen Sie die üblichen Rechenregeln für Summen, Produkte und Quotienten solcher Limiten. (Hierbei sei der Fall $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \pm \infty$ zunächst ausgeschlossen).

Aufgabe 2. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und sei $z_0 \in \overline{D}$. Zeigen Sie:

- (1) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, falls $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \pm \infty$.
- (2) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \infty$, falls $f(z) > 0$ für alle $z \in D$ und $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$.
- (3) Formulieren Sie weitere Varianten dieser Aussagen.

Aufgabe 3. (a) Verifizieren Sie noch einmal die Rechenregeln für die Funktionen $z \mapsto a^z$ und $x \mapsto \log_a(x)$ aus Satz 14.7 der Vorlesung.

(b) Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

$$e^{\ln(a)+3\ln(b)}, \quad \log_2(128 \cdot 640)$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie mit Hilfe eines Taschenrechners die Werte $\log_{10}(x)$ für $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (bis auf 2 Stellen hinter dem Komma). Berechnen Sie mit Hilfe dieser Zahlen die Werte $\log_{10}(x)$ mit gleicher Genauigkeit für

$x = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, \dots$

Benutzen Sie den Logarithmus zur Basis 10 zur Konstruktion eines Rechenschiebers für die Multiplikation!

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Beweisen sie: Ist $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ streng monoton wachsend (bzw. fallend) und bijektiv, so gilt für jede Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(\varphi(y)) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} f(\varphi(y))$$

(bzw. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(\varphi(y))$ und $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} f(\varphi(y))$), falls jeweils einer dieser Grenzwerte existiert. Insbesondere folgt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{y}\right).$$

Nur mündlich: Überlegen Sie sich andere Varianten dieser Regeln.

Aufgabe 2. (a) Seien $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ und $q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ reelle Polynome mit $a_n, b_m \neq 0$. Untersuchen Sie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

in Abhängigkeit von n, m und a_n, b_m .

(b) Zeigen Sie: $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$. (Dies rechtfertigt die Definition $0^0 = 1$.)

Aufgabe 3. (Fehlerabschätzungen für die Berechnung von e^x)

(a) Seien $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ mit $|a - a'| \leq \varepsilon$, $|b - b'| \leq \delta$. Dann gilt

$$|ab - a'b'| \leq |a|\delta + |b|\varepsilon + \varepsilon\delta.$$

(b) Aus Satz 14.1 der Vorlesung folgt: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$ gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| e^x - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \right| \leq \frac{2}{(N+1)!}.$$

Nutzen Sie diese Abschätzung zur Berechnung von $e^{\frac{5}{2}}$ mit einem Fehler von höchstens $\frac{1}{1000}$.

Aufgabe 4 Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

(a) Zeigen Sie: f ist stetig, streng monoton wachsend, bijektiv, und es gilt $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von f .

Hinweis: Berechnen Sie zunächst eine Umkehrfunktion für

$$g : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty); g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

und nutzen Sie dann das Prinzip $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$, wenn $h : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ bijektive Abbildungen sind!

Abgabe: Donnerstag, den 18.01.2007, 10 Uhr.