A1

a) $\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z})$, $\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z})$

- Z cosh, sinh sind stetig

  Die e-Fkt ist stetig $\Rightarrow e^{z}+e^{-z},\ e^{z}-e^{-z}$ stetig $\Rightarrow$ Beh

- Z $\cosh(z) = \cos(iz)$

  $\cos(iz) \overset{\text{Vorl}}{=} \frac{1}{2}(e^{i(iz)}+e^{-i(iz)}) = \frac{1}{2}(e^{-z}+e^{z}) = \cosh(z)$

- Z $\sinh(-z) = i\sin(iz)$

  $i\sin(iz) \overset{\text{Vorl}}{=} i\,\frac{1}{2i}(e^{i(iz)}-e^{-i(iz)}) = \frac{1}{2}(e^{-z}-e^{z}) = -\frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}) = -\sinh(z)$

- Z $\cosh(-z) = \cosh(z)$

  $\cosh(-z) = \frac{1}{2}(e^{-z}+e^{-(-z)}) = \frac{1}{2}(e^{-z}+e^{z}) = \cosh(z)$

- Z $\sinh(-z) = -\sinh(z)$

  $\sinh(-z) = \frac{1}{2}(e^{-z}-e^{z}) = -\frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}) = -\sinh(z)$

b) Z $\forall z,w \in \mathbb{C}$ gilt

(i) $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w)+\sinh(z)\sinh(w)$

(ii) $\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w)+\cosh(z)\sinh(w)$

(iii) $\cosh^2(z)-\sinh^2(z) = 1$

Beweis

(i) $\cosh(z+w) \overset{a)}{=} \cos(i(z+w)) = \cos(iz)\cos(iw) - \sin(iz)\sin(iw)$

$\overset{a)}{=} \cosh(z)\cosh(w) - \left(\frac{\sinh(z)}{-i}\cdot\frac{\sinh(w)}{-i}\right) = \cosh(z)\cosh(w)+\sinh(z)\sinh(w)$

(ii) $\sinh(z+w) \overset{a)}{=} (-i)\sin(i(z+w)) = (-i)(\cos(iz)\sin(iw)+\sin(iz)\cos(iw))$

$= \cos(iz)\,(-i)\sin(iw) + (-i)\sin(iz)\cos(iw) \overset{a)}{=} \cosh(z)\sinh(w)+\cosh(w)\sinh(z)$

(iii) $\cosh^2(z)-\sinh^2(z) \overset{a)}{=} \cos(iz)\cos(iz) - (-i\sin(iz))(-i\sin(iz)) = \cos^2(iz) - (-i)^2\sin^2(iz)$

$= \cos^2(iz)+\sin^2(iz) = 1$

c) Z $\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Beide Summen absolut konvergent

$\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\frac{1}{2}(1^n-(-1)^n) \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(*) für grade n gilt $\frac{1}{2}(1^n-(-1)^n) = 0$

für ungrade n gilt $\frac{1}{2}(1^n-(-1)^n) = 1$

$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ analog

A2)

a) • $f:(0,\infty)\to\mathbb{C}$, $f(x)=x^a$ für ein festes $a\in\mathbb{C}$

Sei $a=\alpha+i\beta$ Also $f(x)=x^{(\alpha+i\beta)}=e^{\ln x^{(\alpha+i\beta)}}=e^{(\alpha+i\beta)\ln x}$

$=e^{\alpha\ln x}\cdot e^{i\beta\ln x}$

$$f'(x)=e^{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha}{x}e^{i\beta\ln x}+e^{\alpha\ln x}e^{i\beta\ln x}\cdot\frac{i\beta}{x}=e^{\alpha\ln x+i\beta\ln x}\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{i\beta}{x}\right)$$

$$=e^{(\alpha+i\beta)\ln x}\left(\frac{\alpha+i\beta}{x}\right)=e^{a\ln x}\frac{a}{x}=e^{\ln x^a}\cdot\frac{a}{x}=x^a\cdot\frac{a}{x}=ax^{a-1}$$

• $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x$, $a>0$ fest

Also $f(x)=e^{x\ln a}$

$\Rightarrow f'(x)=e^{x\ln a}\cdot\ln a=\ln(a)\cdot a^x$

• $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^x=e^{x\ln x}$

$\Rightarrow f'(x)=e^{x\ln x}\cdot(\ln(x)\cdot 1+x\cdot\frac{1}{x})=x^x(\ln(x)+1)=x^x\ln(x)+x^x$

b) (i) $f(x)=x^a$, $a>0$ difbar für $x=0$?

Betrachte die Folge $x_n=\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, sowie den Difquot als Folge

$$b_n=\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\overset{\overset{x=0}{!}}{=}\frac{0-(\frac{1}{n})^a}{0-\frac{1}{n}}=\frac{-\frac{1}{n^a}}{-\frac{1}{n}}=\frac{1}{n^{a-1}}$$ aufgefasst

<u>1 Fall</u> $a>1$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a-1}}\overset{\overset{a>1}{!}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$

$\Rightarrow$ Der Difquot ex und somit ist f an der Stelle 0 difbar

<u>2 Fall</u> $a=1$

$$b_n=\frac{1}{n^{a-1}}\overset{\overset{a=1}{!}}{=}\frac{1}{n^0}=\frac{1}{1}=1$$

Also gilt insb. $\lim_{n\to\infty}b_n=1$ (da b_n konstant 1)

und somit ex der Difquot und f ist an der Stelle 0 difbar

<u>3 Fall</u> $a<1$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a-1}}=\lim_{n\to\infty}n^{1-a}$, also b_n divergent (da $1-a>0$)

und somit f an der Stelle 0 nicht difbar

A3) Berechne die Ableitungen von:

(i) $f(x) = \log_a(x)$, $0<a\neq 1$ fest

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln(a)}$$

(ii) $f(x) = \operatorname{arccotan}(x)$

Nach 15.10 gilt $f'(x) = \frac{1}{f^{-1\prime}(f(x))}$

Es gilt $f^{-1}(x) = \operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Also $f^{-1\prime}(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotan}^2(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(-1-\operatorname{cotan}^2(\operatorname{arccotan}(x)))} = \frac{1}{-1-x^2} = \frac{-1}{1+x^2}$$

(iii) $f(x) = x\ln(x) + x$

$$f'(x) = \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) + 1 = \ln(x) + 1 + 1 = \ln(x) + 2$$

<u>Übrigens:</u> für $g(x) = x\ln(x) - x$ gilt $g'(x) = \ln(x) + 1 - 1 = \ln x$, also ist g die Aufleitung von $\ln x$!

(iv) $f(x) = \cos(e^{x^2})\ln(x^2+1)$

$$f'(x) = \left(-\sin(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot 2x\right) \cdot \left(\ln(x^2+1)\right) + \left(\cos(e^{x^2})\right)\left(\frac{1}{x^2+1} \cdot 2x\right)$$

$$= -2x\sin(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot \ln(x^2+1) + \frac{2x}{x^2+1}\cos(e^{x^2})$$

(v) $f(x) = \frac{\cos(x)}{e^x(x^2+1)}$

$$f'(x) = \frac{(-\sin(x))(e^x(x^2+1)) - (\cos(x)) \cdot [e^x \cdot 1 \cdot (x^2+1) + e^x \cdot 2x]}{(e^x(x^2+1))^2}$$

$$= \frac{e^x\left(-\sin(x)(x^2+1) - \cos(x)(x^2+2x+1)\right)}{e^{2x}(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-\sin(x)(x^2+1) - \cos(x)(x+1)^2}{e^x(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{\sin(x)}{e^x(x^2+1)} - \frac{\cos(x)(x+1)^2}{e^x(x^2+1)^2}$$

A4) Z $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bel difbar mit $f'(x)=f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow f(x)=f(0)e^x\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Bew
Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben mit f difbar und $f'(x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Definiere $h(x)=f(x)\cdot e^{-x}$
Dann gilt $h'(x)=f'(x)e^{-x}+f(x)(-e^{-x})$
$$= e^{-x}(f'(x)-f(x)) = 0 \quad , \text{da } f'(x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Da $h'(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow h$ ist eine Konstante Funktion.
Sei also $c\in\mathbb{R}$ derart, dass $h(x)=c\ \forall x\in\mathbb{R}$
Insbesondere gilt dann
$c=h(0)=f(0)\cdot e^{-0}=f(0)\cdot 1=f(0)$,
also $c=f(0)$
Weiterhin gilt $c=h(x)=f(x)e^{-x}$
$\Rightarrow f(x)=c\cdot 1/e^{-x}=c\cdot e^{x}=f(0)e^{x}$

Da f bel mit den geforderten Eigenschaften war folgt nun die Beh

□