

**Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I, WS 2006/07
Blatt 9**

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Begründen Sie: ist $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe, so gilt

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|.$$

Aufgabe 2. (a) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die Konvergenzbereiche der folgenden Potenzreihen (mit Begründung!)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 (z-1)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (z-1)^n.$$

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (z-z_0)^n.$$

Achtung: Hier wird nach dem **ganzen** Konvergenzbereich gefragt, also nicht **nur** nach dem Konvergenzradius!

Aufgabe 3. (a) Sei $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Gauss-Klammerfunktion, dh.

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist diese Funktion stetig bzw. unstetig? (mit Beweis!).

(b) Sei $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < \sqrt{2} \\ 1 & \text{falls } x > \sqrt{2} \end{cases}.$$

Zeigen Sie: f ist auf ganz \mathbb{Q} stetig.

Aufgabe 4. Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (a, b)$, so gilt $f = g$.

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ gegeben. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \in \mathbb{C}$ mit $a \leq |a_n| \leq b$. Zeigen Sie: Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ hat den Konvergenzradius $R = 1$.

a) Berechnen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{26}}{b^n} (z - 4)^n, \text{ mit } 0 \neq b \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (z - 1)^n.$$

Aufgabe 2. (Sinusreihe) (a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent ist.

(b) Wir werden später in der Vorlesung zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Formel

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

gilt. Benutzen Sie diese Formel und $\sin(-x) = -\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, um ein Polynom $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ anzugeben, mit

$$|\sin(x) - p(x)| \leq 0,0001 \quad \text{für alle } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Hinweis: Benutzen Sie die Abschätzung $\frac{\pi}{2} < 2$ und die Fehlerabschätzung aus Satz 9.11 für die Konvergenz alternierender Reihen!

Aufgabe 3. (a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an denen die Sägezahnfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x - [x]$ stetig ist. Skizzieren Sie den Graphen von f !

(b) Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie: Dann gilt auch $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$!

Aufgabe 4. Ist $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ und ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, so sind die Funktionen $\bar{f} : D \rightarrow \mathbb{C}$ und $|f|, \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\bar{f}(z) = \overline{f(z)}, \quad |f|(z) = |f(z)|, \quad \operatorname{Re}(f)(z) = \operatorname{Re}(f(z)), \quad \operatorname{Im}(f)(z) = \operatorname{Im}(f(z))$$

für alle $z \in D$. Zeigen Sie:

- (1) f ist stetig $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ sind beide stetig $\Leftrightarrow \bar{f}$ ist stetig.
- (2) f stetig $\Rightarrow |f|$ ist stetig.

Abgabe: Donnerstag, den 21.12.2006, 10 Uhr.