§19 Uneigentliche Integrale

Wir wollen in diesem Abschnitt Integrale von Fkt. einführen, die entweder auf unbeschr. Intervallen definiert sind od. wo die Fkt. selbst unbeschränkt wird.

Bsp: (1) Für alle $R>0$ ex. $\int_0^R \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(R)$.
Für $R\to\infty$ gilt $\int_0^R \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(R) \to \frac{\pi}{2}$, also macht es Sinn $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, bzw. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$.

(2) Für alle $r>0$ gilt $\int_r^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_r^1 = 2-2\sqrt{r} \to 0$ für $r\to 0$,
also setzen wir $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{r\to 0}\int_r^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$.

Skizze: 

Beachte: Auch wenn wir $\frac{1}{\sqrt{x}}$ in 0 durch 0 fortsetzen ist $\frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $[0,1]$ unbeschränkt, also nicht (Riemann-) integrierbar im bisherigen Sinn!

19.1 Definition (UB).

(1) Seien $b\in\mathbb{R}$, $a<b$ (bzw. $a=-\infty$) und $f:(a,b]\to\mathbb{C}$ mit f ist integrierbar auf $[r,b]$ $\forall\, a<r<b$. Dann setzen wir $\int_a^b f(x)dx := \lim_{r\to a}\int_r^b f(x)dx$ (mit $a<r<b$) falls dieser Grenzwert existiert.

(2) Analog: Ist $a\in\mathbb{R}$, $b>a$ (bzw. $b=\infty$), $f:[a,b)\to\mathbb{C}$ mit f intb. auf $[a,R]$ $\forall\, a<R<b$, so setzen wir
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{R\to b}\int_a^R f(x)dx,$$ falls der Limes existiert.

(3) Sind nun $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a<b$ und ist $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ mit f intb. auf $[r,R]$ $\forall a<r<R<b$, so setzen wir $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{r \to a \\ R \to b}} \int_r^R f(x)dx,$$ falls dieser Grenzwert existiert.

Achtung: Hier gilt wie üblich $\lim_{\substack{r \to a \\ R \to b}} \int_r^R f(x)dx = d$, falls für jedes Paar von Folgen $(r_n)_n, (R_n)_n$ mit $a<r_n<R_n<b$ und $r_n \to a, R_n \to b$ gilt $\lim_{n\to\infty} \int_{r_n}^{R_n} f(x)dx = d$.

(Ähnliches gilt für die Grenzwerte in (1) und (2).)

19.2 Bem. Ist $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ wie in (3) und ist $c \in (a,b)$ bel., so gilt $\int_a^b f(x)dx$ existiert wie in (3) g.d.w. $\int_a^c f(x)dx$ und $\int_c^b f(x)dx$ exist. wie in (1) bzw. (2) und dann gilt $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$!

(der Bew. ist etwas technisch, und wir lassen ihn aus!).

19.3 Bsp Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

(1) $\int_1^\infty \frac{1}{x^a}dx$ ex $\iff a>1$ (und dann gilt $\int_1^\infty \frac{1}{x^a}dx = \frac{1}{a-1}$)

(2) $\int_0^1 \frac{1}{x^a}dx$ ex. $\iff a<1$ (dann $\int_0^1 \frac{1}{x^a}dx = \frac{1}{1-a}$)

(3) $\int_0^\infty \frac{1}{x^a}dx$ ist $\forall a \in \mathbb{R}$ divergent !

Bew: Für $a=1$ gilt $\int_1^R \frac{1}{x}dx = \ln(R) - \cancel{\ln(1)} \to \infty$ für $R \to \infty$

und für $0<r<1$ gilt $\int_r^1 \frac{1}{x}dx = \cancel{\ln(1)} - \ln(r) \to \infty$ für $r \to 0$,

also ex $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ und $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ nicht !

(1) Sei nun $a \neq 1$. Dann folgt $\int_1^R \frac{1}{x^a}dx = \frac{1}{1-a} x^{1-a} \Big|_1^R$
$= \frac{1}{1-a}(R^{1-a} - 1) \to \begin{cases} \frac{1}{a-1}, & \text{falls } a > 1 \\ \infty, & \text{falls } a < 1 \end{cases}$

(2) Ebenso $\int_r^1 \frac{1}{x^a}dx = \frac{1}{1-a} x^{1-a} \Big|_r^1 = \frac{1}{1-a}(1 - r^{1-a}) \to \begin{cases} \frac{1}{1-a}, & a < 1 \\ \infty, & a > 1 \end{cases}$. $\blacksquare$

Wie für Reihen kann man auch für uneigentl. Integrale nützliche Konvergenzkriterien Beweisen. ZB. gilt:

<u>19.4 Satz</u> (VB) (Beschränktheitskriterium)
Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$ und sei $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ mit f intb. auf $[r,R]$ $\forall a < r < R < b$. Dann gelten:

(1) Die Fkt. $|f| : (a,b) \to \mathbb{R}$ ist intb. g.d.w. ein $0 \leq C \in \mathbb{R}$ ex. mit $\int_r^R |f(x)|dx \leq C \quad \forall a < r < R < b$.

(2) Existiert $\int_a^b |f(x)|dx$, so auch $\int_a^b f(x)dx$, und es gilt $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

(3) (Majoranten-/Minorantenkriterium) Sei zusätzlich $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq g(x) \; \forall x \in (a,b)$. Dann gelten:
(a) Ex. $\int_a^b g(x)dx$, so auch $\int_a^b |f(x)|dx$, und dann gilt $\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
(b) Divergiert $\int_a^b |f(x)|dx$, so divergiert auch $\int_a^b g(x)dx$.

Analoge Resultate gelten auch für die einseitigen uneigentl. Integrale wie in 19.1 (1) + (2).

<u>Bew:</u> (1) Existiert $\int_a^b |f(x)|dx$, so folgt $\int_r^R |f(x)|dx \leq C := \int_a^b |f(x)|dx$ $\forall a < r < R < b$ und $0 \leq C \in \mathbb{R}$.
Existiert umgekehrt $0 \leq C \in \mathbb{R}$ mit $\int_r^R |f(x)|dx \leq C \quad \forall a < r < R < b$,

so setze $d := \sup\{\int_r^R |f(x)|dx \mid a<r<R<b\} \le C$.
Ist dann $(r_n)_n, (R_n)_n$ mit $a<r_n<R_n<b$, $r_n \to a$, $R_n \to b$ und $\varepsilon>0$ geg., so ex. zunächst $a<r_0<R_0<b$ mit
$$d-\varepsilon > \int_{r_0}^{R_0} |f(x)|dx$$
und dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a<r_n<r_0<R_0<R_n<b$ $\forall n \ge N$, und dann folgt für alle $n \ge N$:
$$d \ge \int_{r_n}^{R_n} |f(x)|dx \ge \int_{r_0}^{R_0} |f(x)|dx > d-\varepsilon, \text{ dh } \int_{r_n}^{R_n} |f(x)|dx \to d, n\to\infty.$$

(2) Sei $a<c<b$. Dann genügt es nach 19.2 zu zeigen, dass $\int_a^c f(x)dx$ und $\int_c^b f(x)dx$ existieren. Wir zeigen die Existenz von $\int_c^b f(x)dx$ (das andere Integral folgt analog).

Sei dazu $(R_n)_n$ mit $c<R_n<b$ und $R_n \to b$. Dann ist $\left(\int_c^{R_n} f(x)dx\right)_n$ ein Cauchy-Folge, denn für $n,m \in \mathbb{N}$ mit $R_m \le R_n$ folgt $\left|\int_c^{R_n} f(x)dx - \int_c^{R_m} f(x)dx\right| = \left|\int_{R_m}^{R_n} f(x)dx\right|$
$\le \int_{R_m}^{R_n} |f(x)|dx = \left|\int_c^{R_n} |f(x)|dx - \int_c^{R_m} |f(x)|dx\right|$ (und analog, wenn $R_n \le R_m$) und da $\left(\int_c^{R_n} |f(x)|dx\right)_n$ Cauchy, da konvergent, folgt hieraus, dass auch $\left(\int_c^{R_n} f(x)dx\right)_n$ Cauchy.
Damit ex. $\lim_{n\to\infty} \int_c^{R_n} f(x)dx$.

<u>Zeige noch</u>: Ist $(\tilde R_n)_n$ weitere Folge mit $c<\tilde R_n<b$, so gilt auch $\int_c^{\tilde R_n} f(x)dx \to d$. Aber: wie oben folgt
$$\left|\int_c^{\tilde R_n} f(x)dx - \int_c^{R_n} f(x)dx\right| \le \left|\int_c^{\tilde R_n} |f(x)|dx - \int_c^{R_n} |f(x)|dx\right| \to 0,$$
für $n\to\infty$, also $\lim_{n\to\infty} \int_c^{\tilde R_n} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_c^{R_n} f(x)dx = d$

Da $\left|\int_c^R f(x)dx\right| \le \int_c^R |f(x)|dx \le \int_c^b |f(x)|dx$ $\forall c<R<b$ folgt auch

$\left|\int_c^b f(x)dx\right| \le \int_c^b |f(x)|dx.$

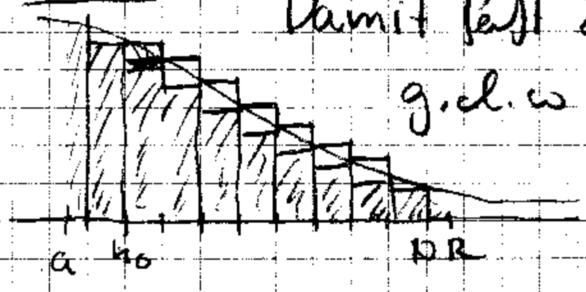
(3) folgt jetzt sofort aus (1)! ■

Mit Hilfe von Satz 19.4. zeigt man sehr leicht das folgende Kriterium zur Konvergenz von Reihen.

<u>19.5 Satz</u> (VB) (Reihenvergleichskriterium)
Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $f: [a,\infty) \to [0,\infty)$ monoton fallend. Ferner sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \ge a$. Dann sind äquivalent:
(1) $\int_a^\infty f(x)dx$ existiert.
(2) $\sum_{n=n_0}^\infty f(n)$ ist konvergent.

<u>Bew</u>: Der Beweis folgt sofort aus 19.4 (1) und dem Beschränktheitskriterium für absolut konvergente Reihen, denn ist $R > a$ beliebig und ist $N \in \mathbb{N}$ mit $N \le a < N+1$, so folgt $\int_a^{n_0-1} f(x)dx + \sum_{n=n_0}^{N} f(n) \le \int_a^R f(x)dx \le \int_a^{n_0} f(x)dx + \sum_{n=n_0}^{N} f(n)$

<u>Skizze</u>:



Damit folgt $\{\int_a^R f(x)dx \mid R > a\}$ beschränkt g.d.w. $\{\sum_{n=n_0}^{N} f(n) \mid N \ge n_0\}$ beschränkt. ■

<u>19.6 Bemerkung</u>: Aus Satz 19.5 und Bsp. 19.3. erhalten wir einen neuen Beweis für die Tatsache, dass $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a}$ konvergent g.d.w. $a > 1$ ist. (Vergl. 9.10)