Kurzfassung der Mathematik für Physiker I, WS 2006/07

von Siegfried Echterhoff

§1 Aussagenlogik, vollständige Induktion. Zu Beginn wurden einige Grundlagen der Aussagenlogik diskutiert. Wichtige Themen waren: Was ist ein mathematischer Beweis? Verknüpfungen von Aussagen und indirekte Beweise.

Danach wurde das wichtige Prinzip der vollständigen Induktion vorgestellt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei hierbei eine Aussage A_n gegeben. Wir wollen alle Aussagen A_n, $n \in \mathbb{N}$, simultan beweisen. Dazu verfahren wir wie folgt:

(1) Wir zeigen: A_1 ist wahr (Induktionsanfang).
(2) Wir zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ (Induktionsschritt).

Sind die Schritte 1. und 2. erfolgreich durchgeführt worden, so sind alle Aussagen A_n bewiesen.

Beispiel: Wir wollen zeigen: $\sum_{l=1}^n l = \frac{n(n+1)}{2}$. Dazu:

(1) Ist $n = 1$, so gilt $\sum_{l=1}^1 l = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$, also ist die Behauptung wahr für $n = 1$.
(2) Wir nehmen an: Die Aussage sei wahr für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt für $n+1$:

$$\sum_{l=1}^{n+1} l = \left(\sum_{l=1}^{n} l\right) + (n+1) \overset{\text{Ann.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

dh. die Aussage ist wahr für $n+1$.

Wichtige Resultate, die mit vollständiger Induktion bewiesen wurden, sind:
Binomische Formel: $(a+b)^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} a^l b^{n-l}$.
Geometrische Summe: Für $x \neq 1$ gilt: $\sum_{l=0}^n x^l = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
Bernoullische Ungleichung: Für alle $x \geq -1$ gilt: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

§2 Mengen und Abbildungen. Hier wurden die wichtigsten Begriffe aus der Mengenlehre (Durchschnitt, Vereinigung und Komplemte von Mengen) sowie der Begriff einer Abbildung zwischen zwei Mengen eingeführt. Sind X, Y nichtleere Mengen, so ist eine Abbildung $f : X \to Y$ eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ *genau ein* Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen, so können wir die Hintereinanderausführung

$$g \circ f : X \to Z; g \circ f(x) = g(f(x))$$

definieren. Für Abbbildungen $f : X \to Y$ sind die folgenden Begriffe fundamental:

- Ist $A \subseteq X$, so heißt $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ das *Bild von A in Y bzgl. f*.
- Ist $B \subseteq Y$, so heißt $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ das *Urbild von B in X bzgl. f*.
- f heißt *injektiv*, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. (Eine äquivalente Formulierung ist: f ist injektiv, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ folgt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$.)
- f heißt *surjektiv*, falls zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$. (Dies ist äquivalent zu $f(X) = Y$.)
- f heißt *bijektiv*, falls f injektiv *und* surjektiv ist.

Eine Abbildung ist genau dann bijektiv, wenn eine Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ für f existiert, dh. $f^{-1} : Y \to X$ ist eine Abbildung, so dass $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$, wobei für jede nichtleere Menge M, $\mathrm{id}_M : M \to M; \mathrm{id}_M(m) = m$ die Identität auf M bezeichnet. Es ist leicht zu sehen, dass es stets nur *eine* Umkehrabbildung geben kann! Ist $f : X \to Y$ injektiv, so erhalten wir durch *Verkleinern* der Menge Y eine bijektive Abbildung $f : X \to f(X)$. Wir können dann auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(X) \to X$ bilden.
Achtung: Man muss sich davor hüten die Bezeichnung $f^{-1}(y)$ (die Umkehrabbildung f^{-1} angewandt auf $y \in Y$) mit der Bezeichnung $f^{-1}(\{y\})$ (das Urbild von der einelementigen Teilmenge $\{y\} \subseteq Y$ in X) zu verwechseln! Während $f^{-1}(\{y\})$ für jede Abbildung definiert ist (und unter Umständen eine recht große Teilmenge von X sein kann), ist der Begriff $f^{-1}(y)$ **nur für bijektive Abbildungen definiert und bezeichnet dann genau das Element $x \in X$ welches durch f auf y abgebildet wird!**

Abzählbare Mengen. Eine Menge M heißt *abzählbar*, falls eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to M$ existiert (wenn $M \neq \emptyset$) oder $M = \emptyset$. Jede endliche Menge ist abzählbar. Ist M nicht endlich und abzählbar, so existiert sogar eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to M$, dh. M ist *gleichmächtig* zu $\mathbb{N}$. Interessante Beobachtungen sind: Alle abzählbaren Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar und endliche direkte Produkte abzählbarer Mengen sind abzählbar! Insbesondere ist auch die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar! Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (dh. die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$) ist nicht abzählbar. Später wird gezeigt, dass auch echte Intervalle in $\mathbb{R}$ nicht abzählbar sind!

§3 Die reellen Zahlen. In diesem Abschnitt werden die Axiome für einen angeordneten, archimedischen Körper $\mathbb{K}$ vorgestellt. Neben den allgemeinen Körperaxiomen für Addition und Multiplikation besitzt ein solcher Körper eine *Anordnung* $\mathbb{K}^+$, also eine Teilmenge von $\mathbb{K}$, die die folgenden Axiome erfüllt:

(1) $\mathbb{K} \setminus \{0\} = -\mathbb{K}^+ \cup \mathbb{K}^+$ und $-\mathbb{K}^+ \cap \mathbb{K}^+ = \emptyset$,
(2) sind $a, b \in \mathbb{K}^+$, so auch $a + b \in \mathbb{K}^+$ und $a \cdot b \in \mathbb{K}^+$.

Die Elemente in $\mathbb{K}^+$ nennen wir dann *positiv*, und für $a, b \in \mathbb{K}$ setzen wir $a < b$, falls $b - a \in \mathbb{K}^+$, $a > b$, falls $b < a$ und $a \leq b$ (bzw. $a \geq b$), falls $a < b$ oder $a = b$ (bzw. $a > b$ oder $a = b$). Insbesondere gilt $a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{K}^+$.

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind angeordnete Körper. Für $\mathbb{Q}$ gilt dabei $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$. Wichtige Rechenregeln sind:

(1) Aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$.
(2) Aus $a > b$ und $c > 0$ folgt $ac > bc$. Aus $a > b$ und $c < 0$ folgt $ac < bc$.
(3) Aus $a > b > 0$ folgt $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
(4) Aus $a > b$ und $c > d$ folgt $a + c > b + d$. Gilt zusätzlich $b, d > 0$, so folgt auch $ac > bd$.
(5) Für $a \neq 0$ gilt $a^2 > 0$. Insbesondere gilt $1 = 1^2 > 0$!
(6) Ist $a < b$, so auch $n \cdot a < n \cdot b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $0 < a < b$, so gilt auch $0 < a^n < b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Mit diesen Regeln folgt leicht, dass die oben angegebene Ordnung auf $\mathbb{Q}$ die einzig mögliche ist! Mit vollständiger Induktion zeigt man leicht für jeden angeordneten Körper $\mathbb{K}$ (also insb. für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$): **Bernoulli Ungleichung:** Für alle $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Ein angeordneter Körper $\mathbb{K}$ heißt *archimedisch*, falls zu jedem $x \in \mathbb{K}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x \leq n \cdot 1$. Die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind archimedisch (für $\mathbb{Q}$ folgt dies leicht aus den Rechenregeln). Die wichtigsten Konsequenzen aus dem gerade formulierten Archimedischen Axiom sind

- Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
- Ist $b > 1$, so existiert zu jedem $R \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > R$.
- Ist $0 < q < 1$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $q^n < \varepsilon$.

Diese Aussagen stellen wichtige Stützpfeiler der gesamten Analysis dar! (Die beiden unteren Aussagen werden mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung bewiesen!)

Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Ein großes Manko der rationalen Zahlen besteht in der Tatsache, dass nicht jede positive Zahl $a \in \mathbb{Q}$ eine Quadratwurzel besitzt, obwohl unsere Anschauung sagt, dass solche Wurzeln existieren sollten. So können wir uns sicher ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von 2 m^2 vorstellen, dass dann aber eine Seitenlänge von $\sqrt{2}$ m haben müsste. Ein leichter indirekter Beweis zeigt aber, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein kann! Die Menge der rationalen Zahlen ist also in einem gewissen Sinne unvollständig! Die reellen Zahlen entstehen aus den rationalen Zahlen durch "Vervollständigung" (also durch "Auffüllen" der Lücken)!

Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ lässt sich durch das **Intervallschachtelungsprinzip** charakterisieren: Sei $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von kompakten Intervallen in $\mathbb{R}$ mit

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
(2) zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n - a_n < \varepsilon$.

Dann existiert (genau) ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe des Intervallschachtelungsprinzips kann man dann zeigen, dass jede positive Zahl $a \in \mathbb{R}$ genau eine positive Quadratwurzel $\sqrt{a} \in \mathbb{R}$ besitzt. Man kann sogar für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine eindeutig bestimmte positive k-te Wurzel $\sqrt[k]{a} \in \mathbb{R}$ finden! Eine weitere direkte Folgerung des Intervallschachtelungsprinzips ist die bereits erwähnte Tatsache, dass jedes echte Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ überabzählbar ist! Da $\mathbb{Q}$ (und damit auch jede Teilmenge von $\mathbb{Q}$) abzählbar ist, folgt hieraus, dass jedes echte Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ (überabzählbar viele) nichtrationale Zahlen enthält. Auf der anderen Seite gilt aber auch $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ für jedes echte Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$!

§4. Supremum und Infimum. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach oben (bzw. unten) beschränkt*, fall ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $a \leq c$ für alle $a \in M$ (bzw. $a \geq c$ für alle $a \in M$). c heißt dann *obere (bzw. untere) Schranke* von M. Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt: Jede nach oben (bzw. unten) beschränkte nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine **kleinste** obere Schranke (bzw. **größte** untere Schranke). Die kleinste obere Schranke $\sup(M)$ von M heißt *Supremum* von M (Bez. $\sup(M)$) und die größte untere Schranke heißt *Infimum* von M (Bez. $\inf(M)$). Ist $\sup(M) \in M$, so ist $\sup(M)$ das größte Element von M, welches wir dann als *Maximum* $\max(M)$ von M bezeichnen. Ebenso: ist $\inf(M) \in M$, so ist $\inf(M)$ das kleinste Element von M, welches wir als *Minimum* $\min(M)$ von M bezeichnen. Es macht Sinn, die Bezeichnungen $\sup(M)$ und $\inf(M)$ auch auf unbeschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ auszudehenen. Wir sagen dann $\sup(M) = \infty$, falls M nach oben unbeschränkt, und $\inf(M) = -\infty$, falls M nach unten unbeschränkt. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist $\sup(I)$ (bzw. $\inf(I)$) gerade die obere (bzw. untere) Intervallgrenze von I.

§5. Komplexe Zahlen. In diesem Abschnitt wurde der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen eingeführt: $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$, wobei i eine (imaginäre) Lösung der Gleichung $z^2 = -1$ ist. Aus der Regel $i^2 = -1$ lassen sich sofort durch formales Ausrechnen die korrekten Formeln für Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ herleiten! Ebenso folgt aus $i^2 = -1$, dass $\mathbb{C}$ keine Anordnung besitzt.[1] Großer Vorteil gegenüber $\mathbb{R}$: Jede quadratische Gleichung $z^2 + az + b = 0$ in $\mathbb{C}$ besitzt mindestens eine Lösung und jede komplexe Zahl $z \neq 0$ besitz genau zwei verschiedene Wurzeln in $\mathbb{C}$.

Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$, so heißt $\bar{z} = x - iy$ die zu z konjugiert komplexe Zahl und $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt der Betrag von z. Wichtige Rechenregeln:

(1) $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$, $(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$, $\frac{a+ib}{c+id} = \frac{1}{c^2+d^2}(a+ib)(c-id)$.
(2) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ und $\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$. [2]

Sind $z, w \in \mathbb{C}$, so ist $|z - w|$ der Abstand von z zu w in der Ebene. Ganz wichtig: **Dreiecksungleichung:** $|z + w| \leq |z| + |w|$ (bzw. $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$)

§6. Polarkoordinaten, Sinus- und Cosinusfunktionen, komplexe Wurzeln und Polynome.

Ist $\varphi \in \mathbb{R}$, so bezeichne $z(\varphi)$ den Punkt auf dem Einheitskreis der vom Punkt 1 ausgehend nach Durchlaufen der Streckenlänge $|\varphi|$ auf dem Einheitskreis, entgegen dem Uhrzeigersinn wenn $\varphi \geq 0$ und im Uhrzeigersinn wenn $\varphi \leq 0$, erreicht wird.

---

[1] Da in jedem angeordneten Körper das Element -1 negativ ist, und jede Quadratzahl positiv ist!

[2] Diese Gleichung liefert eine leichte Faustformel zur Berechnung komplexer Brüche!

Wir definieren dann die Cosinus- und Sinusfunktionen

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

durch

$$\cos(\varphi) = \mathrm{Re}(z(\varphi)) = \frac{1}{2}\big(z(\varphi) + \overline{z(\varphi)}\big), \quad \sin(\varphi) = \mathrm{Im}(z(\varphi)) = \frac{1}{2i}\big(z(\varphi) - \overline{z(\varphi)}\big).$$

Wir werden später lernen, dass für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ die Gleichung $z(\varphi) = e^{i\varphi}$ gilt, woraus dann die Eulerdarstellungen

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi), \quad \cos(\varphi) = \frac{1}{2}\big(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\big), \quad \sin(\varphi) = \frac{1}{2i}\big(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\big)$$

folgen. Wir definieren die Zahl π als den halben Umfang des Einheitskreises. Dann folgt

Satz 1. *Ist $0 \neq z \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl, so existiert eine eindeutig bestimmte Zahl $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ $(= |z|e^{i\varphi})$.* [3]

Das Paar $(|z|, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$ heißt *Polarkoordinaten* von z. Die Zahl φ ist hierbei der Winkel (im Bogenmaß) zwischen der reellen Achse in $\mathbb{C}$ und der Verbindungsstrecke von z und 0. Diese Darstellung erlaubt eine schöne geometrische Deutung der Multiplikation in $\mathbb{C}$: Beim Multiplizieren zweier komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert. Als relativ leichte Folgerung aus der Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen erhält man die Existenz der n-ten Einheitswurzeln: Die Gleichung $z^n = 1$ besitzt in $\mathbb{C}$ genau n-verschiedene Lösungen, nämlich $z_l = e^{i\frac{l2\pi}{n}}$, $0 \leq l < n$. Ist dann $0 \neq a \in \mathbb{C}$, so existieren genau n verschiedene komplexe Wurzeln von a, also Lösungen der Gleichung $w^n = a$. Schreiben wir $a = |a|e^{i\varphi}$ in Polarkoordinaten, so sieht man sofort, dass $w_0 = |a|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\varphi}{n}}$ eine dieser Lösungen ist. Die anderen erhält man durch Multiplikation mit den n-ten Eiheitswurzeln $z_1, \ldots, z_{n-1}$. Wegen $z_0 = 1$ folgt also $w_l = w_0 \cdot z_l$, $0 \leq l < n$ sind genau die n-ten Wurzeln aus a.

Im Rest des Abschnitts haben wir uns mit Polynomfunktionen beschäftigt, also mit Funktionen der Form

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Sind die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ reell (bzw. rational), so nennen wir p reelles (bzw. rationales) Polynom. Ist der höchste Koeffizient $a_n \neq 0$, so setzen wir $\mathrm{grad}(p) := n$. Es gilt:

Satz 2. (Division mit Rest) *Es seien f und g Polynome mit $g \neq 0$. Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome q und r mit $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(g)$ und $f = q \cdot g + r$. Sind f und g reell (bzw. rational), so auch q und r.*

Als Folgerungen erhalten wir: Ist $0 \neq f$ ein Polynom, und it $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_1) = 0$, so existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom q mit $\mathrm{grad}(q) < \mathrm{grad}(f)$ und $f(z) = q(z)(z - z_1)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da nach dem Fundamentalsatz der Algebra (der hier nicht bewiesen wurde) jedes nichtkonstante Polynom mindestens eine komplexe Nullstelle

[3] Formel für φ: Ist $z = x + iy$ mit $y \geq 0$, so ist $\varphi = \arccos(\frac{x}{|z|})$; ist $y < 0$, so ist $\varphi = 2\pi - \arccos(\frac{x}{|z|})$.

besitzt, folgt durch Induktion, dass jedes Polynom f mit $\mathrm{grad}(f) = n$ eine (bis auf Vertauschen der Faktoren eindeutige) Zerlegung

$$f(z) = \alpha \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

besitzt. Hieraus folgt dann, dass ein Ploynom f mit $\mathrm{grad}(f) = n$ höchstens n verschiedene Nullstellen besitzt. Fassen wir gleiche Faktoren zusammen, erhalten wir eine Zerlegung

$$f(z) = \alpha \cdot (z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_r)^{k_r},$$

mit $k_1 + \cdots + k_r = n$ und $z_1, \ldots, z_r$ sind die paarweise verschiedenen Nullstellen von f. Der i-te Exponent k_i heißt dann die (algebraische) *Vielfachheit* der Nullstelle z_i.

Ist $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ein reelles Polynom, und ist z eine komplexe Nullstelle von f, so ist auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von f. Wegen $(x - z_i)(x - \bar{z}_i) = x^2 + b_i x + c_i$ mit $b_i = -2\,\mathrm{Re}(z_i), c = |z_i|^2 \in \mathbb{R}$, erhalten wir durch geeignetes Zusammenfassen der komplexen Nullstellen in der obigen Zerlegung von f in komplexe Linerarfaktoren eine reelle Zerlegung von f der Gstalt

$$f(x) = \alpha \cdot (x - x_1)^{l_1} \cdots (x - x_s)^{l_s} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{k_1} \cdots (x^2 + b_t x + c_t)^{k_t},$$

mit $\alpha, x_1, \ldots x_s, b_1, \ldots, b_t, c_1, \ldots c_t \in \mathbb{R}$ und $l_1 + \cdots + l_s + 2(k_1 + \ldots + k_t) = n$.

§7. Konvergenz von Folgen. Sei $\emptyset \neq M$ eine Menge. Eine *Folge* in M ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to M; n \mapsto a_n$.

Definition 1. Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$, so sagen wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen a, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Wichtige Grenzwerte sind (unter anderem):

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ (für jedes $\alpha > 0$).
(2) $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. [4]
(3) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}$ für alle $a > 0$.
(4) $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$ (Definition von e; später: $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n = e^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$).

Wichtige Rechenregeln für Grenzwerte sind:

(1) $a_n \to a, b_n \to b \Rightarrow a_n + b_n \to a + b, a_n b_n \to ab$ und $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ (falls $b \neq 0$).
(2) $a_n \to a, b_n \to a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq N_0 \Rightarrow c_n \to a$.
(3) $a_n \to a \Leftrightarrow |a_n - a| \to 0$ (insb. $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$).
(4) Aus 2. und 3. folgt: $b_n \to 0$ und $|a_n - a| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $a_n \to a$.
(5) $a_n \to a \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, a_n \to \mathrm{Re}\, a$ und $\mathrm{Im}\, a_n \to \mathrm{Im}\, a$.
Ferner gilt: $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$.
(6) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte monoton steigende (bzw. fallende) Folge in $\mathbb{R}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$).

[4] Diese Grenzwerte folgen aus dem Archimedischen Axiom und der Bernoullischen Ungleichung (siehe die Diskussion zu §1)

Ferner gilt: jede konvergente Folge in $\mathbb{C}$ ist beschränkt.

§8. Häufungspunkte, Teilfolgen und Cauchy-Folgen. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und ist $\mathbb{N} \to \mathbb{N}; k \mapsto n_k$ eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit $n_{k+1} > n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (wir betrachten also nur die Folgenglieder mit Index n_k, $k \in \mathbb{N}$). Einfache Beispiele: $n_k = 2k, n_k = 2k-1, n_k = k^2$ (z.B. ist $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die entsteht, wenn wir nur die Folgenglieder mit geradem Index auswählen).
Wichtige Eigenschaft: Jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt dann $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) heißt *Häufungspunkt* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder a_n existieren mit $|a_n - a| < \varepsilon$. Es gilt: a ist genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $a_{n_k} \to a$. Es gilt der folgende fundamentale

Satz 3. *(Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Für reelle Folgen lässt sich dieser Satz noch genauer formulieren. Sei dazu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Wir setzen

$$s_n := \inf\{a_m : m \geq n\} \quad \text{und} \quad S_n := \sup\{a_m : m \geq n\}.$$

Dann ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach oben beschränkte monoton wachsende Folge, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge und es existieren die Grenzwerte

$$\overline{\lim}\, a_n := \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{und} \quad \underline{\lim}\, a_n := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

$\overline{\lim}\, a_n$ heißt *Limes Superior* und $\underline{\lim}\, a_n$ heißt *Limes Inferior* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man kann dann zeigen, dass $\overline{\lim}\, a_n$ (bzw. $\underline{\lim}\, a_n$) der größte (bzw. kleinste) Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Definition 2. Eine Folge in $\mathbb{C}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Es ist leicht zu sehen, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist. Umgekehrt konnten wir mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß zeigen:

Satz 4. *Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ ist konvergent.*

Tatsächlich liefert der obige Satz eine Charakterisierung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ mit Hilfe von Cauchy-Folgen. Man kann sogar zeigen (dieser Satz wurde nicht in der Vorlesung formuliert und dient hier nur zur zusätzlichen Information):

Satz 5. (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$). *Setzen wir die Anordnung von $\mathbb{R}$ und das Archimedische Axiom als gegeben voraus, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *Es gilt das Intervallschachtelungsprinzip (siehe oben).*
(2) *Jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.*
(3) *Jede nach oben beschränkte monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.*

(4) *(Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *besitzt einen Häufungspunkt.*
(5) *Jede beschränkte Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *besitzt eine konvergente Teilfolge.*
(6) *Jede Cauchy-Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent.*

§9. Reihen.

Definition 3. Eine Reihe ist eine formale unendliche Summe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und $n_0 \in \mathbb{Z}$. Eine Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ heißt *konvergent*, falls die Folge der Partialsummen $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert durch $s_k = \sum_{n=n_0}^{k} a_n$ konvergiert, und dann heißt $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} s_k$ der *Wert* der Reihe. Die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent* falls die Reihe der Beträge $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Wichtige Reihen sind:

(1) (Harmonische Reihe) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent (d.h. nicht konvergent).
(2) Ist $\alpha > 0$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann konvergent, wenn $\alpha > 1$. [5]
(3) (Geometrische Reihe) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und divergent für $|z| \geq 1$ (folgt aus der Formel für die geometrische Summe).

Bei der Untersuchung von Reihen spielen die Konvergenzkriterien eine herausragende Rolle:

(1) (Cauchy-Kriterium) $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ist konvergent genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\left|\sum_{n=k}^{l} a_n\right| < \varepsilon$ für alle $l \geq k \geq N$ (folgt sofort aus dem Cauchy Kriterium für Folgen).
(2) Ist $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge (folgt leicht aus 1.)[6].
(3) (Majoranten-Minoranten-Kriterium) Ist $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \geq n_0$, so ist $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ (absolut) konvergent und $\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |b_n|$ (Insbesondere folgt: Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent).
Ist $\sum_{n=n_0}^{\infty} |b_n|$ divergent und $|b_n| \leq a_n$ für alle $n \geq n_0$, so ist auch $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ divergent (folgt beides aus dem Cauchy-Kriterium).
(4) (Leibniz-Kriterium) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge, so ist $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent. Insbesondere folgt, das $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent ist (diese Reihe ist aber nicht absolut konvergent).
(5) (Wurzelkriterium) Sei $\alpha := \overline{\lim}|a_n|^{\frac{1}{n}}$. Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Ist $\alpha > 1$, so ist $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ divergent (folgt aus Majorantenkriterium und Vergleich mit geometrische Reihe)[7].

---

[5] Wurde gezeigt für $\alpha \in \mathbb{Q}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ folgt die Aussage dann leicht mit dem Majoranten-Minoranten-Kriterium

[6] Die Umkehrung gilt nicht, da $\frac{1}{n} \to 0$ aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nicht konvergent

[7] Für die (absolute) Konvergenz reicht es aus, dass ein $0 \leq \alpha < 1$ und ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existieren mit $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \alpha$ für alle $n \geq N_0$. Es reicht aber **nicht**, dass $|a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ für alle $n \geq N_0$! Erinnerung: Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, so ist $\overline{\lim} b_n = \lim_{n\to\infty}(\sup\{b_k : k \geq n\})$. Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben unbeschränkt, so setzen wir $\overline{\lim} b_n = \infty$.

(6) (Quotientenkriterium) Sei $a_n \neq 0$ für all $n \geq N_0$ und es existiere $\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, und ist $\alpha > 1$, so ist die Reihe divergent[8].

(7) (Beschränktheitskriterium) $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent genau dann, wenn ein $C \geq 0$ existiert mit $\sum_{n=n_0}^{k} |a_n| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (folgt sofort aus dem Konvergenzkriterium für monotone Folgen).

Absolut konvergente Reihen haben die schöne Eigenschaft (im Gegensatz zu normal konvergenten Reihen), dass jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe wieder absolut konvergent ist, und dass der Wert der umgeordneten Reihe gleich dem Wert der ursprünglichen Reihe ist. Darüberhinaus gilt für absolut konvergente Reihen die Produktformel (Cauchy-Produkt)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad \text{mit} \quad c_n = \sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l}.$$

Hieraus folgt die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ nach dem Quotientenkriterium). Es gilt

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

§10. Potenzreihen. Ein wichtiger Grund für die Betrachtung von Reihen ist die Tatsache, dass viele Funktionen (z.B. exp, sin, cos) eine Reihendarstellung besitzen. Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, wobei z eine komplexe Variabel ist. Ist $D = \{z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ ist konvergent}\}$, so erhalten wir eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ durch die Vorschrift $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Natürlich sind wir aus diesem Grunde sehr daran interessiert für eine gegebene Potenzreihe die Menge D zu bestimmen. Aus dem Wurzelkriterium für Reihen folgt:

Satz 6. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe und sei $\alpha := \overline{\lim}|a_n|^{\frac{1}{n}}$ (dieser Wert ist ∞, falls $\{|a_n|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt). Ist dann $R := \frac{1}{\alpha}$ (wobei $R = 0$, falls $\alpha = \infty$ und $R = \infty$, falls $\alpha = 0$), so gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ist absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < R$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ist divergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.*

Der Wert R im obigen Satz heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. R ist eindeutig charakterisiert durch die Eigenschaft, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ auf dem offenen Kreis um z_0 mit Radius R konvergiert und außerhalb des abgeschlossenen Kreises um z_0 mit Radius R divergiert. Auf dem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = R\}$ kann beides vorkommen, und deshalb müssen diese Werte im allgemeinen gesondert betrachtet werden. Eine oft bequeme Möglichkeit

[8] Auch hier genügt für die Konvergenzaussage die Existenz von $0 \leq \alpha < 1$ und $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \alpha$ für alle $n \geq N_0$. Achtung: Es reicht nicht $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ für alle $n \geq N_0$. Betrachte hierzu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

den Konvergenzradius zu berechnen liefert das

Quotientenkriterium: Ist $a_n \neq 0$ für $n \geq N_0$ und existiert $\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, so ist $R := \frac{1}{\alpha}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Wichtige Potenzreihen mit Konvergenzradius ∞ sind

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

§11. Stetige Funktionen.

Definition 4. Ist $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ und ist $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so heißt f (folgen-)*stetig* in $z_0 \in D$ falls gilt: Für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $z_n \to z_0$ gilt $f(z_n) \to f(z_0)$. f heißt stetig, falls f in jedem Punkt $z_0 \in D$ stetig ist.

Eine alternative (und äquivalente) Definition für Stetigkeit in $z_0 \in D$ ist die folgende:

Definition 5. $f : D \to \mathbb{C}$ heißt (ε-δ) *stetig* in $z_0 \in D$ falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in D$ gilt: $|z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Die wichtigsten Rechenregeln für stetige Funktionen sind:

(1) Sind $f, g : D \to \mathbb{C}$ stetig, so sind auch $f + g : D \to \mathbb{C}, f \cdot g : D \to \mathbb{C}$ stetig, und ist $D_{\frac{f}{g}} = \{z \in D : g(z) \neq 0\}$, so ist auch $\frac{f}{g} : D_{\frac{f}{g}} \to \mathbb{C}$ stetig (folgt aus entsprechenden Rechenregeln für Folgen).
(2) Sind $f : D \to \mathbb{C}$ und $g : E \to \mathbb{C}$ stetig und ist $f(D) \subseteq E$, so ist auch $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ stetig.
(3) Ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, so ist f stetig auf $U_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$.

Insbesondere sind alle Polynome und alle rationalen Funktionen auf ihren Definitionsbereichen stetig. Ferner sind $\exp, \sin, \cos$, $z \mapsto |z|$, $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$ stetig. Ebenso ist $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}; f(x) = x^\alpha$ für alle $\alpha > 0$ stetig. Ferner sind Umkehrfunktionen $f^{-1} : f(I) \to I$ von jeder streng monoton wachsenden (bzw. fallenden) Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, wenn $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Mit Hilfe der obigen Regeln kann man aus diesen Grundfunktionen viele weitere stetige Funktionen erzeugen.

§12. Konvergenz von Funktionenfolgen Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ und seien $f_n : D \to \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ Funktionen. Dann sagen wir: die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *punktweise* gegen f, wenn für alle $z \in D$ gilt, dass $f_n(z) \to f(z)$. Stetigkeit der Funktionen f_n wird im allgemeinen leider nicht auf den punktweisen Limes f vererbt, z.B. konvergiert die Folge von stetigen Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}; f_n(t) = t^n$ punktweise gegen die in 1 unstetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}; f(t) = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \text{ für } t<1 \\ 1 \text{ für } t=1 \end{smallmatrix} \right\}$.

Bessere Vererbungseigenschaften erhalten wir bei *gleichmäßiger* Konvergenz der Funktionenfolge: wir sagen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und für **alle**

$z \in D$ (bei punktweiser Konvergenz hängt die mögliche Wahl von N auch von der betrachteten Stelle $z \in D$ ab). Hier folgt mit einem leichten $\frac{\varepsilon}{3}$-Argument:

Satz 7. *Ist $f : D \to \mathbb{C}$ der gleichmäßige Limes der stetigen Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, so ist auch f stetig.*

Wichtige Beispiele für gleichmäßige Konvergenz sind gegeben durch Potenzreihen:

Satz 8. *Ist $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, so gilt für jedes $0 < r < R$: die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert durch $f_k(z) := \sum_{n=n_0}^{k} a_n(z - z_0)^n$ konvergiert auf der abgeschlossenen Kugel $B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$ gleichmäßig gegen die durch die Potenzreihe gegebene Funktion $f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.*

Kombinieren wir die beiden obigen Sätze, und nutzen wir aus, dass Stetigkeit in einem Punkt $z \in D$ eine lokale Eigenschaft ist, d.h. nur von den Funktionswerten in einer kleinen Umgebung von z abhängt, erhalten wir als wicthtige Folgerung

Folgerung 9. *Ist $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, so ist die Funktion $f : U_R(z_0) \to \mathbb{C}; f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ stetig.*

Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen kann man auch mit Hilfe der Supremums-Norm beschreiben: Ist $f : D \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion, so setzen wir

$$\|f\|_D := \sup\{|f(z)| : z \in D\}.$$

Dann gilt: die Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$, wenn $\|f_n - f\|_D \to 0$ gilt. Hieraus kann man leicht ein weiteres interessantes Resultat für unendliche Summen von Funktionen herleiten:

Satz 10. *Seien $g_n : D \to \mathbb{C}$ Funktionen mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_D < \infty$. Dann konvergiert für jedes $z \in D$ die Reihe $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ absolut, und die Folge $f_k : D \to \mathbb{C}$, $f_k(z) = \sum_{n=1}^{k} g_n(z)$ konvergiert gleichmäßig gegen f. Insbesondere folgt: sind alle g_n stetig, so ist auch f stetig.*

Den obigen Satz kann man zum Beispiel auf die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

anwenden, denn $\|x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2}\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent.

§12. Der Zwischenwertsatz und stetige Funktionen auf kompakten Intervallen. Als erstes wurde in diesem Abschnitt der wichtige Zwischenwertsatz für stetige Funktionen bewiesen:

Satz 11 (ZWS)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert zu jedem $\gamma \in [f(a), f(b)]$ (bzw. $\gamma \in [f(b), f(a)]$ falls $f(b) < f(a)$) ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = \gamma$.*

Als direkte Folgerung dieses Satzes erhält man die wichtige Tatsache, dass für jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, auch das Bild $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ wieder ein Intervall ist. Diese Tatsache wird sehr häufig benötigt, um die Bilder stetiger Funktionen zu berechnen. Als interessante Anwendungen erhält man zum Beispiel die Resultate, dass jedes ungerade reelle Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv ist, oder dass die Tangens-Funktion $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ bijektiv ist, und daher (da monoton wachsend) eine stetige Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ besitzt.

Für stetige Funktionen auf kompakten Intervallen erhält man durch eine Anwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß den folgenden sehr wichtigen Satz:

Satz 12. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in [a, b]$, d.h. f nimmt auf $[a, b]$ sein Minimum und sein Maximum an.*

Für komplexe stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ folgt zumindest die Existenz eines Punktes $x_1 \in [a, b]$ mit $|f(x)| \leq |f(x_1)|$ für alle $x \in [a, b]$. Insbesondere ist jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt! Kombiniert man den obigen Satz mit dem Zwischenwertsatz, so erhält man: ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt $f([a, b]) = [m, M]$ mit $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Ein wichtiger neuer Begriff in diesem Abschnitt war der Begriff des Funktionen-Grenzwerts: Ist $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, so definieren wir den *Abschluss* $\overline{D}$ von D durch

$$\overline{D} := \{z \in \mathbb{C} : \exists \text{ Folge } (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D \text{ mit } z_n \to z\}.$$

Sind dann $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $z_0 \in \overline{D}$ und $d \in \mathbb{C}$, so definieren wir

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = d :\iff \text{ für jede Folge } (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D \text{ mit } z_n \to z_0 \text{ gilt } f(z_n) \to d.$$

Ganz ähnlich definiert man dann $\lim_{z \to z_0} f(z) = \pm\infty$. Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben (bzw. unten) unbeschränkt, so definieren wir $\lim_{x \to \infty} f(x) = d$ (bzw. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = d$) für $d \in \mathbb{C}$ oder $d = \pm\infty$, durch

$$\lim_{x \to \infty} f(z) = d :\iff \text{ für jede Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D \text{ mit } x_n \to \infty \text{ gilt } f(x_n) \to d$$

(bzw. mit ∞ ersetzt durch $-\infty$). Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit den Intervallgrenzen a, b (wobei a auch $-\infty$ und b auch ∞ sein kann), so gilt für jede monoton wachsende Funktion $f : I \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \quad \text{und} \quad \lim_{x \to b} f(x) = d,$$

mit

$$c := \inf\{f(x) : x \in I\} \quad \text{und} \quad d := \sup\{f(x) : x \in I\}$$

die Intervallgrenzen des Intervalls $f(I)$. Ist $f : I \to \mathbb{R}$ monoton fallend, so gilt entsprechend $\lim_{x \to a} f(x) = d$ und $\lim_{x \to b} f(x) = c$ mit c, d wie oben.

§11. Die Exponentialfunktion. Eine der wichtigsten Funktionen in der Mathematik ist die Exponentialfunktion: $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Wegen der Stetigkeit von Potenzreihen im Inneren des Konvergenzkreises ist exp stetig auf ganz $\mathbb{C}$, und aus dem Cauchy Produkt für Reihen folgt die Funktionalgleichung $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$. Eine andere Darstellung der Exponentialfunktion erhält man durch die Gleichung $\exp(z) = \lim_{n \to \infty}(1 + \frac{z}{n})^n$. Insbesondere gilt $\exp(1) = e$. Ferner gilt

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist streng monoton wachsend und surjektiv (ZWS) und damit existiert eine stetige Umkehrabbildung $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ für exp (ln heißt der natürliche Logarithmus). Mit Hilfe der Exponentialfunktion und des ln können nun allgemeine Potenzen definiert werden: Ist $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$, so setze $a^z := \exp(z \ln a)$. Wegen $\ln e = 1$ folgt insbesondere $\exp(z) = e^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Interessante Eigenschaften der Exponentialfunktion und des Logarithmus sind: $\exp(x)$ geht für $x \to \infty$ schneller gegen unendlich als jede feste Potenz von x (genauer: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Umgekehrt gilt für den Logarithmus: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \to 0$ für jedes $\alpha > 0$, also konvergiert $\ln(x)$ langsamer gegen unendlich als jede (noch so kleine) positive Potenz von x.

Mit Hilfe der Exponentialfunktion können auch die trigonometrischen Funktionen sin und cos beschrieben werden, bzw. zu Funktionen auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden. Es gelten

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

§15. Differenzierbare Funktionen. In diesem Abschnitt haben wir die Differenzierbarkeit von Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) untersucht. Das grundlegende Problem ist hierbei die Frage, ob und wie wir die Steigung der Funktion an einer Stelle $x_0 \in I$ berechnen können. Geometrisch bedeutet dies natürlich die Steigung der Tangente am Graphen von f an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ zu berechnen. Die Idee hierfür ist ganz einfach: betrachte zu Punkten x in der Nähe von x_0 die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$. Diese ist gegeben durch den *Differenzenquotienten*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Lassen wir dann x gegen x_0 laufen, so sollten sich die Sekanten (und dann auch ihre Steigungen) der Tangente (bzw. der Steigung der Tangente) im Punkt $(x_0, f(x_0))$ annähern, zumindest wenn wir einen verwertbaren Grenzwert erhalten. Diese Überlegungen führen zu

Definition 6. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt f *differenzierbar im Punkt* $x_0 \in I$, falls

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Der Wert $f'(x_0)$ heißt *Ableitung* von f an der Stelle x_0. f heißt *differenzierbar*, falls f in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist.

Erste wichtige Ableitungen sind

(1) $(x^a)' = ax^{a-1}$, für $a \neq 0$ (auf den jeweiligen Definitionsbereichen);
(2) $\exp'(x) = \exp(x)$;
(3) $\sin' x = \cos x, \cos' x = -\sin x$.

Im allgemeinen kann man viele Ableitungen mit Hilfe von Ableitungsregeln berechnen. Sind f und g differenzierbar, so gilt:

(1) (Summenregel) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

(2) (Produktregel) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$;

(3) (Quotientenregel) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ (wenn $g(x) \neq 0$);

(4) (Kettenregel) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$;

(5) (Umkehrfunktion) $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, falls f^{-1} stetig und $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$.

Zum Beispiel gilt

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}.$$

Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f auch stetig in x_0. Die Umkehrung gilt aber nicht: Die Funktion $x \mapsto |x|$ ist stetig, aber nicht differenzierbar in 0.

§16. Mittelwertsätze der Differentialrechnung. Sehr wichtig bei Anwendungen der Differentialrechnung sind die Mittelwertsätze. Zunächst haben wir gezeigt: i st $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extremum der differenzierbaren Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, so ist $f'(x_0) = 0$. Hieraus haben wir den Satz von Rolle hergeleitet, der besagt, dass für jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die auf (a,b) differenzierbar ist, und die $f(a) = f(b)$ erfüllt, ein $x_0 \in (a,b)$ existiert mit $f'(x_0) = 0$. Als leichte Anwendung erhielten wir den ersten Mittelwertsatz:

Satz 13 (1. MWS)**.** *Seien $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$ [9]

Der erste Mittelwertsatz hat viele interessante Folgerungen. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so folgt

(1) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist f konstant.
(2) Ist $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) > 0$) für alle $x \in I$, so ist f (streng) monoton wachsend.
(3) Ist $f'(x) \leq 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle $x \in I$, so ist f (streng) monoton fallend.
(4) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$), so liegt in x_0 ein lokales Minimum (bzw. Maximum) der Funktion f vor. Man beachte hier: liegt x_0 im Inneren des Intervalls, so ist $f'(x_0) = 0$ eine notwendige (aber keine hinreichende) Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums von f an der Stelle x_0. Die Randpunkte des Intervalls (wenn im Intervall liegend) müssen immer gesondert betrachtet werden!

Der zweite Mittelwertsatz ist eine Verallgemeinerung des ersten Mittelwertsatzes und folgt ebenfalls aus dem Satz von Rolle:

[9] Das heißt: es existiert ein $x_0 \in (a,b)$ so, dass die Steigung der Tangente an $f(x_0)$ mit der Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ übereinstimmt.

Satz 14 (2. MWS). *Seien $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Ist $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

(insb. gilt $g(b) \neq g(a)$).[10]

Der zweite Mittelwertsatz wurde zur Herleitung der Regel von L'Hospital benutzt:

Regel von L'Hospital: Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und seien $g(x), g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Ist dann $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (bzw. $\pm\infty$), so gilt $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls letzterer existiert (hierbei darf als Grenzwert auch $\pm\infty$ herauskommen). Eine analoge Aussage gilt auch für $x \to \pm\infty$. Eine Anwendung:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(x) + 1)e^{x\ln(x)}}{1} = -\infty,$$

wobei letzteres aus den in der Vorlesung gezeigten Grenzwerten $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ folgt (woraus dann auch $\lim_{x\to 0} e^{x\ln(x)} = \lim_{x\to 0} x^x = 1$ folgt).

§17. Das Riemann Integral. In diesem Abschnitt haben wir den Integralbegriff nach Riemann eingeführt. Dazu sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir wollen die zwischen x-Achse und dem Graphen von f eingeschlossene Fläche berechnen, wobei wir alle Flächen oberhalb der x-Achse positiv und alle Flächen unterhalb der x-Achse negativ berechnen wollen. Die Grundidee hierfür ist die gegebene Funktion möglichst gut von oben und von unten durch Treppenfunktionen zu approximieren, und dann das Integral von f als Grenzwert (bzw. Supremum und/oder Infimum) der Integrale der Treppenfunktionen zu berechnen. Eine Treppenfunktion ist eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, so dass eine Zerlegung $Z = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ und Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\varphi(x) = a_k \quad \text{für alle } x \in (t_{k-1}, t_k) \text{ und } 1 \leq k \leq n.$$

Ist φ eine solche Treppenfunktion, so definieren wir den *Inhalt* von φ durch

$$I(\varphi) := \sum_{k=1}^{n} a_k(t_k - t_{k-1}),$$

was genau dem Flächeninhalt der Fläche zwischen x-Achse und dem Graphen der Treppenfunktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ entspricht. Schreiben wir $T[a, b]$ für die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$, so definieren wir

Definition 7. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißt

$$\mathcal{O}(f) := \inf\{I(\psi) : \psi \in T[a, b], f \leq \psi\}$$

das *Oberintegral* von f und

$$\mathcal{U}(f) := \inf\{I(\varphi) : \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f\}$$

[10] Der erste MWS folgt aus dem zweiten mit $g(x) = x$

das *Unterintegral* von f. f heißt (Riemann-) *integrierbar*, falls $\mathcal{O}(f) = \mathcal{U}(f)$ und dann setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,dx := \mathcal{O}(f) \ \ (= \mathcal{U}(f)).$$

Nicht alle beschränkten Funktionen sind integrierbar. Zum Beispiel gilt für die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R};\ f(x) = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{smallmatrix} \right\},$$

dass $\mathcal{U}(f) = 0$ und $\mathcal{O}(f) = 1 \neq 0$, und damit ist f nicht Riemann-integrierbar.[11]

Ein nützliches Hilfsmittel zur Untersuchung der Integrierbarkeit von Funktionen liefert der folgende Satz

Satz 15. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann sind äquivalent:*

(1) *f ist integrierbar.*
(2) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a,b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $I(\psi - \varphi) < \varepsilon$.*
(3) *Es existieren Folgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $T[a,b]$ mit $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $I(\psi_n - \varphi_n) \to 0$.*

Sind diese Bedingungen erfüllt und sind $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in (3), so folgt zudem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} I(\psi_n).$$

Mit Hilfe dieses Satzes kann man dann ganz schnell die folgenden Eigenschaften des Integrals nachweisen: Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

- $f + g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar und es gilt
$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$
- Ist $f \leq g$, so gilt auch $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.
- Sind $f^+, f^- : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\},$$
so sind f^+, f^- und $|f| = f^+ + f^-$ integrierbar. Ferner gilt immer
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$
- Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$ und ist $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ gegeben mit f inetegrierbar über $[a,b]$ und $[b,c]$, so ist f auch integrierbar über $[a,c]$ und es gilt
$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar. Aber noch wichtiger ist:

[11] Es gibt aber einen besseren Integralbegriff, das Lebesgue-Integral, wo diese Funktion integrierbar ist. Es gilt dann $\int_{[0,1]} f(x)\,dx = 1$.

Satz 16. *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar und für das Integral gilt die Formel*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}).$$

Dieses zentrale Resultat folgt aus Satz 15 zusammen mit der wichtigen Tatsache, dass jede stetige, auf einem **kompakten** Intervall definierte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ sogar *gleichmäßig stetig* ist, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt:
$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
Beachte, dass bei der gleichmäßigen Stetigkeit das δ nur in Abhängigkeit von ε gewählt werden kann, wohingegen bei der gewöhnlichen Stetigkeit einer Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ das δ von ε **und** einem gegebenen Punkt $x_0 \in D$ abhängt. Als Beispiel dafür, das gleichmäßige Stetigkeit im allgemeinen echt stärker als gewöhnliche Stetigkeit ist, betrachten wir die Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{x}$. Diese Funktion ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, denn zu $\varepsilon = 1$ und beliebigem $\delta > 0$ folgt für alle $n > \max\{\frac{1}{\delta}, 1\}$, dass $|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n} < \delta$ aber $|f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{2n})| = |n - 2n| = n > 1 = \varepsilon$.

Ein weiterer wichtiger Satz in diesem Abschnitt ist der **Mittelwertsatz der Integralrechnung:** Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $g \geq 0$, so existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit
$$f(x_0) \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$
Im Fall $g = 1$ folgt hieraus die Tatsache, dass jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ seinen Mittelwert annimmt, d.h. es existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit
$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$
Der Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt leicht aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen und der Tatsache, dass für jedes stetige $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g > 0$ (d.h. $g \geq 0$ und es existiert mindestens ein $x \in [a, b]$ mit $g(x) > 0$) auch $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ gilt (Achtung! Dies gilt im allgemeinen nicht, wenn g nicht stetig ist!).

Schließlich haben wir noch einige zusätzliche Notationen eingeführt: ist $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion, so heißt f integrierbar, wenn $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind, und dann setzen wir
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,dx + i \int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,dx.$$
Ferner setzen wir für jede integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$:
$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx.$$

§18. Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und ist $f : I \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so heißt eine Funktion $F : I \to \mathbb{C}$ *Stammfunktion* von f, falls F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt. Sind $F, G : I \to \mathbb{C}$ zwei beliebige Stammfunktionen von f, so existiert eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit $F(x) = G(x) + c$ für alle $x \in I$. Dies folgt aus der Tatsache (die wir aus dem 1.

MWS der Differentialrechnung gefolgert haben), dass eine differenzierbare Funktion $g : I \to \mathbb{C}$ mit Ableitung $g' = 0$ konstant sein muss. Angewandt auf $g = F - G$ folgt dann, dass $F - G$ konstant ist, denn $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$.

Satz 17 (Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und sei $a \in I$ fest gewählt. Dann gelten*

(1) *Ist $F : I \to \mathbb{C}$ definiert durch $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, so ist F eine Stammfunktion von f.*
(2) *Ist G eine beliebige Stammfunktion von f, und ist $b \in I$ beliebig, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Die Aussage in (2) ist eine direkte Konsequenz aus (1) und der obigen Diskussion, denn ist F wie in (1) und $G : I \to \mathbb{C}$ eine beliebige weitere Stammfunktion von f, so existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $G(x) = F(x) + c$ für alle $x \in I$, und dann folgt

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Für den Beweis der ersten Aussage zerlegt man zunächst f in Realteil und Imaginärteil um o.B.d.A. annehmen zu können, dass f reell ist. Dann ist der Beweis eine relativ leichte Folgerung aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Als Konsequenz des Hauptsatzes folgt, dass zur Berechnung des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ einer stetigen Funktion f die Berechnung einer Stammfunktion $F : I \to \mathbb{C}$ von großem Nutzen ist, da wir dann Integrale mit beliebigen Grenzen einfach durch Einsetzen der Grenzen in die Stammfunktion berechnen können. Es ist hier nützlich das *unbestimmte Integral*

$$\int f(x)\,dx$$

einzuführen. Dieses steht für die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f. Ist eine konkrete Stammfunktion $F : I \to \mathbb{C}$ für f gegeben, so schreiben wir

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

wobei c für eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ steht. Wichtige Stammfunktionen sind:

(1) $\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + c$, wenn $a \neq 1, a \in \mathbb{C}$ und $x \in (0, \infty)$;
(2) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, wenn $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (bzw. $x \in \mathbb{R}$, wenn $n \in \mathbb{N}_0$);
(3) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
(4) $\int e^x\,dx = e^x + c$, $x \in \mathbb{R}$;
(5) $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$, $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c$, $x \in \mathbb{R}$;
(6) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + c$, $x \in \mathbb{R}$;
(7) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + c$, $x \in (-1, 1)$.

Im allgemeinen ist es aber viel schwieriger Stammfunktionen zu berechnen als umgekehrt Ableitungen auszurechnen. Oft ist es sogar unmöglich eine Stammfunktion in geschlossener Form (also als Kombination bekannter Funktionen) auszurechnen (man versuche zum Beispiel eine Stammfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = e^{x^2}$

zu berechnen). Einige Hilfsmittel für die Berechnung von Stammfunktionen kann man aber aus den Ableitungsregeln herleiten. Als erstes Beispiel betrachten wir die Produktregel fürs Differenzieren. Diese liefert das Verfahren

Partielle Integration: Seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen (d.h. f, g sind differenzierbar und die Ableitungen f', g' sind stetig). Die Produktregel liefert

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Durch Umordnen folgt hieraus

$$f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g'.$$

Integrieren auf beiden Seiten liefert

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,dx + c$$

für die unbestimmten Integrale, bzw.

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \big(f(x) \cdot g(x)\big)\Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx$$

für die bestimmten Integrale, wobei für eine beliebige Funktion h der Ausdruck $h(x)\big|_a^b$ für die Differenz $h(b) - h(a)$ steht. Im Vorlesungsmanuskript finden Sie einige Beispiele für diese Methode. Interessant ist insbesondere, dass man mit Hilfe der partiellen Integration oftmals recht gut Stammfunktionen von Umkehrfunktionen berechnen kann, indem man als zusätzlich Funktion die Einsfunktion (als f') einfügt: zum Beispiel gilt

$$\int \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx \overset{f'=1, g=\ln(x)}{=} x \cdot \ln(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx = x \cdot \ln(x) - x + c.$$

Analog rechnet man

$$\int \arctan(x)\,dx = \int 1 \cdot \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Das auf der rechten Seite aufgetauchte Integral $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$ berechnet man mit der

Substitutionsregel: Diese basiert auf der Kettenregel für die Ableitung. Sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und sei $F : I \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion für f. Ferner sei $u : J \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann folgt mit der Kettenregel

$$(F \circ u)'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x)$$

Integrieren auf beiden Seiten (und Vertauschen der Seiten) liefert

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_a^b (F \circ u)'(x)\,dx = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du,$$

wobei die letzte Gleichung aus der Tatsache folgt, dass F eine Stammfunktion von f ist. Wir betrachten auf der rechten Seite u als Integrationsvariable und nicht mehr als Funktion. Vereinfacht bekommen wir also die Formel

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

bzw

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du + c, \quad u = u(x)$$

für die unbestimmten Integrale. Hierbei müssen wir aber auf der rechten Seite nach Berechnen der Stammfunktion die Variable u durch die Funktion $u(x)$ ersetzen. Daher der Zusatz $u = u(x)$! Als Beispiel betrachten wir das oben aufgetauchte integral $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$. Setzen wir $u(x) = 1 + x^2$, so folgt $u'(x) = 2x$. Mit $f(u) = \frac{1}{u}$ erhalten wir

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u(x)}u'(x)\,dx \overset{\text{Subst.}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du \;\; (\text{mit } u = 1 + x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|u|) + c \;\; (\text{mit } u = 1 + x^2) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c.$$

Zusammen mit der obigen Rechnung erhalten wir dann

$$\int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c.$$

Einige generelle Formeln, die man mit der Substitutionsregel erhält sind die folgenden:

(1) $\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$ für $c \in \mathbb{R}$ fest und $\int_a^b f(cx)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)\,dx$ wenn $c \neq 0$.

(2) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(|f(x)|) + c$, wenn $f(x) \neq 0$.

Ein interessantes Beispiel ist auch das folgende:

$$\int \arcsin(x)\,dx = \int 1 \cdot \arcsin(x)\,dx \overset{f'=1, g=\arcsin}{=} x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Wir berechnen $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ mit Hilfe der Substitution $u(x) = 1 - x^2$. dann folgt $u'(x) = -2x$ und damit

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u(x)}}u'(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du \;\; (\text{mit } u = 1 - x^2)$$

$$= \sqrt{u} + c \;\; (\text{mit } u = 1 - x^2) = \sqrt{1 - x^2} + c.$$

Damit folgt

$$\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) - \sqrt{1 - x^2} + c.$$

Wenn wir die Rechnung oben genauer verfolgen, so sehen wir, dass wir diese nur auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$ durchführen dürfen, da nur dort die arcsin-Funktion differenzierbar ist, und wir die Ableitung bei der partiellen Integration benötigen. Auf der anderen Seite ist arcsin aber auf dem ganzen Intervall $[-1, 1]$ stetig, und besitzt nach dem Hauptsatz der Integral-und Differentialrechnung auf ganz $[-1, 1]$ eine Stammfunktion. Die oben berechnete Stammfunktion für arcsin ist sicher auf dem ganzen Intervall $[-1, 1]$ definiert, und dort auch stetig. Dann folgt aus dem folgenden Lemma, dass sie dann auch automatisch auf ganz $[-1, 1]$ eine Stammfunktion ist:

Lemma 18. *Seien $F, f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und sei F Stammfunktion von f auf (a, b). Dann gilt auch $F' = f$ auf ganz $[a, b]$.*

Das Lemma ist eine leichte Folgerung aus dem 1. MWS der Differentialrechnung. Im obigen Fall wenden wir das Lemma auf $F, f : [-1,1] \to \mathbb{R}; f(x) = \arcsin(x)$ und $F(x) = x\arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} + c$ an.

Umgekehrte Substitution. Hierbei ist $f : I \to \mathbb{C}$ gegeben, und wir wollen $\int f(x)\,dx$ berechnen. Wir versuchen nun das Problem zu vereinfachen, indem wir x als Funktion von t auffassen, d.h. wir suchen eine **bijektive** stetig differenzierbare Funktion $x : J \to I; t \mapsto x(t)$, so dass das unbestimmte Integral $\int f(x(t))x'(t)\,dt$ (natürlich bezüglich der Variablen t) bekannt ist. Dann folgt aus der gewöhnlichen Substitutionsregel:

$$\int_{x^{-1}(a)}^{x^{-1}(b)} f(x(t))x'(t)\,dt = \int_{x(x^{-1}(a))}^{x(x^{-1}(b))} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Für die unbestimmten Integrale erhalten wir die Formel

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))x'(t)\,dt + c, \quad \text{mit} \ \ t = t(x)$$

(d.h. wir schreiben t als Funktion von x vermöge der Umkehrfunktion x^{-1}). Als Beispiel wollen wir die Fläche des Einheitskreises berechnen. Der Einheitskreis wird nach oben durch die Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ und nach unten durch die Funktion $g = -f$ begrenzt. Die Fläche des Kreises berechnet sich daher durch

$$\int_{-1}^{1} (f-g)(x)\,dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Um den Ausdruck zu vereinfachen setzen wir $x(t) = \sin(t)$ und bemerken, dass $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ stetig differenzierbar und bijektiv ist. Wegen $1 - \sin^2(t) = \cos^2(t)$, und da $\cos(t) \geq 0$ für alle $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt \\ &\overset{\text{Part. Int}}{=} \frac{1}{2}\big(\sin(t)\cos(t) + t\big)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

und damit ist der Flächeninhalt des Einheitskreises gleich π. Wollen wir das unbestimmte Integral $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ auf $[-1,1]$ berechnen, so erhalten wir wie oben zunächst

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\big(\sin(t)\cos(t) + t\big) + c$$

und ersetzen dann auf der rechten Seite das t durch die Umkehrfunktion von sin angewandt auf x, also $t = \arcsin(x)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\big(\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x)) + \arcsin(x)\big) + c \\ &= \frac{1}{2}\big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\big) + c.\end{aligned}$$

Grundsätzlich sind Substitutionen $x = \sin(t), x = \cos(t)$ nützlich für Ausdrücke mit $1-x^2$ auf dem Intervall $[-1,1]$, und die Substitution $x = \cosh(t)$ ist oft nützlich bei Ausdrücken mit $x^2 - 1$ für $|x| \geq 1$ (wegen $\cosh^2(t) - 1 = \sinh^2(t)$). Die Substitution $x = \sinh(t)$ ist nützlich bei Ausdrücken mit $1 + x^2$ (wegen $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$).

Die Substitution $x = 2\arctan(t)$**.** Integrale mit Funktionen die sich als Summen, Produkte und Quotienten aus den Funktionen $\sin(x), \cos(x)$ zusammen setzen, und die sich nicht direkt mit anderen Methoden, wie etwa der partiellen Integration lösen lassen, kann man oft mit der Substitution $x = 2\arctan(t)$ berechnen. Es gilt nämlich

$$\cos(2\arctan(t)) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{und} \quad \sin(2\arctan(t)) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Wegen $2\arctan'(t) = \frac{2}{1+t^2}$ erhalten wir dann bei der Substitution $x = 2\arctan(t)$ eine rationale Funktion in t, deren Integral sich dann mit Hilfe der Partialbruchzerlegung lösen läßt. Als Beispiel betrachten wir

$$\int \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}\,dx, \quad \text{für } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Die Substitution $x = 2\arctan(t)$ liefert

$$\int \frac{1}{\cos(2\arctan(t))\sin(2\arctan(t))}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1+t^2}{t(1-t^2)}\,dt, \quad t \in (0,1).$$

Wie schon oben erwähnt, löst man dieses Integral mit der Methode der

Partialbruchzerlegung: Hierbei betrachtet man generell Integrale über rationale Funktionen, d.h. Funktionen der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p und q Polynome sind. In einem ersten Schritt stellen wir hierbei sicher, dass $\operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(q)$ gilt: ist dies nicht der Fall, so schreiben wir mit Hilfe der Polynom-Division mit Rest die Funktion p als

$$p(x) = h(x)q(x) + r(x)$$

wobei h und r Polynome sind mit $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(q)$. Dann folgt

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int h(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx.$$

Da h ein Polynom ist, können wir das Integral über h sehr leicht ausrechnen. Für das zweite Integral gilt dann aber $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(q)$!

Sei also nun $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $\operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(q)$. Nach §6 existiert eine Zerlegung

$$q(x) = \alpha \cdot (x - z_1)^{l_1} \cdots (x - z_s)^{l_s},$$

wobei $z_1, \ldots, z_s$ die paarweise verschiedenen komplexen Nullstellen von q mit den Vielfachheiten $l_1, \ldots, l_s$ sind. Wir machen dann einen Ansatz

$$(1) \quad \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{11}}{x-z_1} + \frac{A_{12}}{(x-z_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1l_1}}{(x-z_1)^{l_1}} + \cdots + \frac{A_{s1}}{x-z_s} + \cdots + \frac{A_{sl_s}}{(x-z_s)^{l_s}}.$$ [12]

Multiplizieren wir die Gleichung auf beiden Seiten mit $q(x)$, so erhalten wir eine äquivalente Polynomgleichung, wobei auf beiden Seiten Polynome mit Grad

[12]Sind p und q reell, so kann man auch denn alternativen Ansatz

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1l_1}}{(x-x_1)^{l_1}} + \cdots + \frac{A_{s1}}{x-x_s} + \cdots + \frac{A_{sl_s}}{(x-x_s)^{l_s}} \\ &\quad + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + b_1x + c_1} + \cdots + \frac{B_{1k_1}x + C_{1k_1}}{(x^2 + b_1x + c_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{B_{t1}x + C_{t1}}{x^2 + b_tx + c_t} + \cdots + \frac{B_{tk_t}x + C_{tk_t}}{(x^2 + b_tx + c_t)^{k_t}}.\end{aligned}$$

durchführen, wenn

$$q(x) = \alpha \cdot (x - x_1)^{l_1} \cdots (x - x_s)^{l_s} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{k_1} \cdots (x^2 + b_tx + c_t)^{k_t}$$

die in §6 vorgestellte reelle Faktor-Zerlegung von q ist.

$<\operatorname{grad}(q) = n$ stehen. Es folgt dann aus dem Identitätssatz für Polynome, dass Einsetzen von n verschiedenen x-Werten genügend Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten $A_{11}, \ldots, A_{sl_s}$ entstehen. Am schnellsten berechnet man diese Koeffizienten aber meist durch Einsetzen der Nullstellen $z_1, \ldots, z_s$ in diese Polynomgleichung, sowie in alle Polynomgleichungen die zusätzlich entstehen, wenn wir beide Seiten bis zu m-mal ableiten, für $m := \max\{l_1, \ldots, l_s\} - 1$. Ist diese Zerlegung durchgeführt, so bleibt das Problem der Berechnung der (komplexen) Integrale $\int \frac{1}{(x-z)^k}\,dx$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ fest. Ist $k > 1$, so gilt

$$\int \frac{1}{(x-z)^k}\,dx = \frac{1}{1-k}(x-z)^{1-k} + c = \frac{1}{(1-k)(x-z)^{k-1}} + c.$$

Ist $k = 1$ und ist $z = a \in \mathbb{R}$, so folgt

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln(|x-a|) + c.$$

Für $k = 1$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist die Situation leider ein wenig komplizierter. Man kann das Problem hier im Prinzip zwar mit einem auf einer geeignetenTeilmenge von $\mathbb{C}$ definierten **komplexen** Logarithmus lösen, wir wollen diese Funktion aber hier nicht einführen.

Sind p und q **reelle** Polynome (alle obigen Überlegungen treffen ansonsten auch für komplexe Polynome zu), so gehört zu einer komplexen Nullstelle z von q auch die Nullstelle $\bar{z}$ (mit gleicher Vielfachheit). Ist dann $A \in \mathbb{C}$ der zu $\frac{1}{x-z}$ gehörende Koeffizient in der Zerlegung (1), so kann man nachrechnen, dass $\bar{A}$ der zu $\frac{1}{x-\bar{z}}$ gehörende Koeffizient ist. Fassen wir jetzt beide Anteile zusammen, so bekommen wir einen neuen Summanden

$$\frac{A}{x-z} + \frac{\bar{A}}{x-\bar{z}} = \frac{A(x-\bar{z}) + \bar{A}(x-z)}{(x-z)(x-\bar{z})} = \frac{Bx+C}{x^2+bx+c},$$

mit $B = 2\operatorname{Re}(A),\ C = 2\operatorname{Re}(A\bar{z}),\ b = -2\operatorname{Re}(z),\ c = |z|^2$ (vergleiche auch mit §6). Wir haben das Problem jetzt auf die Berechnung des Integrals $\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,dx$ reduziert, wobei wir immer annehmen dürfen, dass $c - \frac{b^2}{4} > 0$ ist (das folgt aus $b = -2\operatorname{Re}(z)$ und $c = |z|^2$). Durch die Substitution $u = \frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}$ kann man dieses Integral auf die Form

$$\int \frac{B'2u + C'}{u^2+1}\,du = B' \int \frac{2u}{u^2+1}\,du + C' \int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

mit geeigneten Konstanten $B', C' \in \mathbb{R}$ bringen. Mit diesen Konstanten erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,dx &= B' \ln(u^2+1) + C' \arctan(u) + d \\
&= B' \ln\left(\frac{(x+\frac{b}{2})^2}{c-\frac{b^2}{4}} + 1\right) + C' \arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right) + d \\
&= B' \ln(x^2+bx+c) + C' \arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right) + \tilde{d},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt einen konstanten Summanden $-B' \ln(c - \frac{b^2}{4})$ in die neue Integrationskonstante $\tilde{d}$ mit aufgenommen haben.

Beispiel. Wir wollen das bei der Berechnung von $\int \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}\,dx$ aufgetauchte Integral $\int \frac{1+t^2}{t(1-t^2)}\,dt$ für $t \in (0,1)$ berechnen. Das Nennerpolynom hat die Zerlegung

$$t(1-t^2) = t(1-t)(1+t) = -t(t-1)(t+1).$$

Wir machen also den Ansatz

$$\frac{1+t^2}{t(1-t^2)} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t-1} + \frac{A_3}{t+1}.$$

Multiplizieren der Gleichung mit $t(1-t)(1+t) = t(1-t^2)$ liefert die neue Gleichung

$$1+t^2 = A_1(1-t^2) - A_2 t(1+t) + A_3 t(1-t).$$

Einsetzen der Werte $t = 0, 1, -1$ ergibt die drei Gleichungen

$$1 = A_1, \quad 2 = -2A_2, \quad \text{und} \quad 2 = -2A_3,$$

womit wir die Zerlegung

$$\frac{1+t^2}{t(1-t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$$

erhalten. Damit folgt dann

$$\int \frac{1+t^2}{t(1-t^2)}\,dt = \ln(|t|) - \ln(|t-1|) - \ln(|t+1|) + c = \ln\big(\frac{t}{t^2-1}\big) + c \text{ für } t \in (0,1).$$

Zusammen mit den früheren Rechnungen erhalten wir dann auch

$$\int \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}\,dx = \ln\big(\frac{t}{t^2-1}\big) + c \;\text{ mit } t = \tan(\frac{x}{2}),$$

da $x = 2\arctan(t)$. Damit folgt

$$\int \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}\,dx = \ln\big(\frac{\tan(\frac{x}{2})}{\tan^2(\frac{x}{2})-1}\big) + c \quad \text{für } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Wir überlassen es dem Leser, diesen Ausdruck noch weiter zu vereinfachen und durch eine Ableitungs-Probe die Richtigkeit der Rechnungen zu überprüfen!

§19. Uneigentliche Integrale. In der Praxis möchte man oftmals auch Integrale von Funktionen berechnen, die entweder unbeschränkt, oder aber auf einem unbeschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind. Hierfür betrachten wir die folgende allgemeine Situation: Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$, und sei $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so dass f auf **jedem** abgeschlossenen und beschränktem Teilintervall $[r, R] \subseteq (a,b)$ integrierbar ist. Wir sagen f ist (uneigentlich) über (a,b) integrierbar, wenn der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{r\to a, R\to b} \int_r^R f(x)\,dx$$

existiert. Wie üblich ist dieser Grenzwert über Folgen definiert: die obige Gleichung bedeutet, dass für **jedes** Paar von Folgen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (a,b) mit $r_n \to a$ und $R_n \to b$ gilt, dass $\int_{r_n}^{R_n} f(x)\,dx$ gegen die Zahl $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert. Natürlich macht es auch Sinn, solche Integrale bezüglich einer kritischen und einer unkritischen

Grenze zu definieren. Ist zum Beispiel $b \in \mathbb{R}$ und $f : (a, b] \to \mathbb{C}$ mit f ist integrierbar auf $[r, b]$ für alle $r \in (a, b]$, so setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r \to a} \int_r^b f(x)\,dx,$$

falls dieser Grenzwert existiert, und analog definieren wir das Integral für Funktionen $f : [a, b) \to \mathbb{C}$ die auf jedem Intervall $[a, R]$ mit $R \in [a, b)$ integrierbar sind durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R \to b} \int_a^R f(x)\,dx,$$

falls dieser Grenzwert existiert. Man überlegt sich dann leicht, dass man die erste Situation aus den beiden letztgenannten zusammensetzen kann: Ist $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ wie oben gegeben und ist $c \in (a, b)$, so gilt

$$\lim_{r \to a, R \to b} \int_r^R f(x)\,dx = \lim_{r \to a} \int_r^c f(x)\,dx + \lim_{R \to b} \int_c^R f(x)\,dx$$

falls diese Grenzwerte existieren (was immer folgt, wenn die Grenzwerte zunächst nur auf *einer* Seite der Gleichung existieren). Es folgt dann natürlich die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Beispiele. (a) Sei $1 \neq a > 0$ und sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{x^a}$. Für alle $r \in (0, 1]$ gilt dann

$$\int_r^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{1-a} x^{1-a}\Big|_r^1 = \frac{1}{1-a}(1 - r^{1-a}).$$

Ist $a < 1$, so gilt $1 - a > 0$ und $r^{1-a} \to 0$ für $r \to 0$. Damit folgt

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{r \to 0} \int_r^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{r \to 0} \frac{1}{1-a}(1 - r^{1-a}) = \frac{1}{1-a}.$$

Ist aber $a > 1$, so folgt $1 - a < 0$ und $r^{1-a} \to \infty$ für $r \to 0$. Das Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx$ existiert dann nicht!

Ist $a = 1$, so erhalten wir $\int_r^1 \frac{1}{x}\,dx = -\ln(r) \to \infty$ für $r \to 0$, also existiert auch das Integral $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ nicht!

(b) Wir betrachten nun die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{x^a}$ für $1 \neq a > 0$. Hier gilt

$$\int_1^R \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{1-a}(R^{1-a} - 1)$$

und dieser Ausdruck konvergiert gegen ∞ wenn $a < 1$ und gegen $\frac{1}{a-1}$ wenn $a > 1$. Also existiert $\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx$ nur für $a > 1$ und dann ist $\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{a-1}$. Im Fall $a = 1$ folgt hier $\int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \ln(R) \to \infty$, also existiert auch das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ nicht. Setzen wir (a) und (b) zusammen, so sehen wir, dass $\int_0^\infty \frac{1}{x^a}\,dx$ für kein $a > 0$ (und auch für kein $a \in \mathbb{R}$) existiert, da eins der obigen Teilintegrale immer divergiert!

(c) Es gilt $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, denn $\int_0^R e^{-x}\,dx = -(e^{-R} - 1) \to 1 \quad$ für $R \to \infty$.
Mit Hilfe der partiellen Integration kann man auch zeigen, dass das Integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert (Übungsaufgabe!). Als weitere Übungsaufgabe zeige man,

dass $\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}\,dx$ existiert, und man berechne das Integral.

Es gibt viele interessante Sätze zu uneigentlichen Integralen. Zum Beispiel kann man ähnlich wie für Reihen ein Majoranten-/Minorantenkriterium beweisen. Es seien dazu $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{C}$ Funktionen, die für alle $R > a$ auf $[a, R]$ integrierbar sind. Ferner gelte $0 \leq |f| \leq g$. Dann gelten:

(1) Existiert $\int_a^\infty g(x)\,dx$, so auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$ und es gilt
$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx.$$
(2) Divergiert $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$, so divergiert auch $\int_a^\infty g(x)\,dx$.

Ebenso kann man wie für Reihen ein Beschränktheits-Kriterium beweisen: Sei $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die auf allen Intervallen $[r, R] \subseteq (a, b)$ integrierbar ist. Es existiere ferner ein $C \geq 0$ mit $\int_r^R |f(x)|\,dx \leq C$ für alle $[r, R] \subseteq (a, b)$. Dann existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ und es gilt
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq C.$$
Mit Hilfe dieses Kriteriums zeigt man dann auch leicht den

Reihenvergleichssatz. Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion. Ferner sei $a \leq n_0 \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

(1) Das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ existiert.
(2) Die Reihe $\sum_{n=n_0}^\infty f(n)$ konvergiert.

Aus dem Reihenvergleichssatz und dem oben gerechneten Beispiel $\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx$ erhalten wir einen neuen Beweis für das bekannte Resultat, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a}$ für alle $a > 1$ konvergiert, aber für $0 < a \leq 1$ immer divergent ist.