

Vokabelbuch

In diesem Teil soll getestet werden, inwieweit Sie in der Lage sind, wichtige Definitionen aus der Vorlesung korrekt zu formulieren. Für jede richtig gelöste Teilaufgabe bekommen Sie einen Punkt. Sie können also in diesem Teil insgesamt 15 Punkte erwerben.

Aufgabe 1. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Geben Sie eine korrekte Definition an für

- (1) f ist injektiv.

f ist injektiv wenn gilt: für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.
(Alternativ: Für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$).

- (2) f ist nicht surjektiv.

f ist nicht surjektiv wenn ein $y \in Y$ existiert mit $f(x) \neq y$ für alle $x \in X$.
(Alternativ: $f(X) \neq Y$).

Aufgabe 2.

- (1) Definieren Sie den Begriff einer Intervallschachtelung und formulieren Sie das Vollständigkeitsaxiom für \mathbb{R} .

Eine Intervallschachtelung ist eine Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ mit $I_{n+1} \subseteq I_n$ für allen $n \in \mathbb{N}$, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|I_N| = b_N - a_N < \varepsilon$. Das Vollständigkeitsaxiom für \mathbb{R} sagt aus, dass zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (2) Geben Sie die Definition für das Supremum $\sup(M)$ einer nichtleeren Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ an (falls $\sup(M)$ existiert) und formulieren Sie die Supremums-Eigenschaft von \mathbb{R} .

$\sup(M)$ ist die kleinste obere Schranke von M . Die Supremums-Eigenschaft von \mathbb{R} besagt, dass jede nach oben beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} ein Supremum besitzt.

Aufgabe 3. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} und sei $a \in \mathbb{C}$. Geben Sie korrekte Definitionen für

- (1) a ist Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a ist Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

- (2) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

- (3) (Falls alle a_n reell!) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $+\infty$.

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $+\infty$, wenn zu jedem $R \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > R$ für alle $n \geq N$.

- (4) Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß.

Jede beschränkte Folge in \mathbb{R} oder \mathbb{C} besitzt eine konvergente Teilfolge

Aufgabe 4. Sei $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in \mathbb{C} . Geben Sie eine korrekte Definition an für:

- (1) $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

Zu $k \in \mathbb{N}$ sei $S_k = \sum_{n=n_0}^k a_n$ die k -te Partialsumme von $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Dann ist $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent, wenn die Folge $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent ist.

- (2) $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

- (3) Wie lautet das Majoranten-Kriterium für die (absolute) Konvergenz der Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$?

Es existiere eine Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \geq N$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ (absolut) konvergent.

- (4) Es existiere ein $C \geq 0$ mit $\sum_{n=n_0}^k |a_n| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Welche (wenn überhaupt) Konvergenzaussagen folgen dann für die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$?

Die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, und dann auch konvergent.

Aufgabe 5. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ und sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

- (1) Wann heißt f stetig im Punkt $z_0 \in D$? Wann heißt f stetig? (Definitionen!)

f heißt stetig im Punkt z_0 , wenn für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $z_n \rightarrow z_0$ auch $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ gilt. (Alternativ: f stetig in z_0 , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt: $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$).

f heißt stetig, wenn f in jedem Punkt $z_0 \in D$ stetig ist.

- (2) Formulieren Sie den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Zu jedem $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ oder $f(b) \leq \gamma \leq f(a)$ existiert ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = \gamma$.

- (3) Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$. Geben Sie die Definition für die Aussage: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f .

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ und für alle $z \in D$ gilt: $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Rechnen

In den folgenden Aufgaben soll getestet werden, inwieweit Sie die in der Vorlesung besprochenen Rechenverfahren beherrschen. Bitte geben Sie nur die Ergebnisse (ohne Begründungen) an. Für jede richtig gelöste Teilaufgabe erhalten Sie einen Punkt. Sie können in diesem Teil also insgesamt 15 Punkte erwerben.

Aufgabe 1. (a) Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen auf die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(1) $(1 + i)\overline{(1 + 3i)}|4 - i|$. Lösung: $4\sqrt{17} - i2\sqrt{17}$

(2) $\frac{3+i}{2-i}$. Lösung: $1 + i$

(b) Stellen Sie $1 + \sqrt{3}i$ in Polarkoordinaten dar.

Berechnen Sie hierzu auch explizit den zugehörigen Winkel:

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

(c) Berechnen Sie alle dritten Wurzeln aus i :

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad z_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right), \quad z_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

Alternativ:

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad z_2 = -i.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Grenzwerte (falls vorhanden) der folgenden Folgen in \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Hierbei seien auch ∞ und $-\infty$ als mögliche Grenzwerte zugelassen. Schreiben Sie "kein Grenzwert" wenn keine Konvergenz im obigen Sinne vorliegt.

(1) $a_n = \frac{(-n+2)^5}{n^4+2n+1}$. Grenzwert: $-\infty$

(2) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Grenzwert: $\frac{1}{e}$

(3) $a_n = (in)^n$. Grenzwert: kein Grenzwert

(4) $a_n = (5n)^{\frac{1}{n}}$. Grenzwert: 1

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die folgenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz. Antworten Sie jeweils mit "ja" (für Konvergenz) bzw. "nein" (für Divergenz).

(1) $a_n = \frac{1}{3^n}$. Antwort: ja

(2) $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. Antwort: ja

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mit

(1) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. $R = 2$

(2) $a_n = n(1 + (-1)^n)$. $R = 1$

Aufgabe 5. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ auf Stetigkeit. Geben Sie als Antwort jeweils eine Beschreibung der Menge $\mathcal{S}_f := \{z \in D; f \text{ ist stetig in } z\}$ an.

Beispiel: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$, so gilt $\mathcal{S}_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

(die Antwort $\mathcal{S}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist natürlich auch richtig).

$$(1) f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C} : f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 2 \\ 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}. \quad \mathcal{S}_f = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$$

$$(2) f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z = 0 \\ (\bar{z})^{2\frac{1}{z}} & \text{für } z \neq 0 \end{cases}. \quad \mathcal{S}_f = \mathbb{C}$$

$$(3) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; f(x) = \exp(\arctan(x) + (\cos(x) \sin(x))^5). \quad \mathcal{S}_f = \mathbb{R}$$

Beweisen

In diesem Abschnitt sollen Sie relativ einfache Aussagen beweisen. Sie dürfen alle Resultate der Vorlesung benutzen. Für jede richtig gelöste Aufgabe erhalten Sie 3 Punkte. Sie können also in diesem Bereich insgesamt 15 Punkte erreichen.

Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Ferner seien $G(a, b) = \sqrt{ab}$ und $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$ das geometrische bzw. arithmetische Mittel von a und b . Beweisen Sie

$$a < G(a, b) < A(a, b) < b.$$

Beweis: Da $a > 0$ gilt: $a < b \Rightarrow a^2 < ab \Rightarrow a = \sqrt{a^2} < \sqrt{ab} = G(a, b)$. Da $a, b > 0$ und $a \neq b$ gilt: $0 < (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 4ab < a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \Rightarrow 2\sqrt{ab} < a+b \Rightarrow \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \Rightarrow G(a, b) < A(a, b)$. Schließlich folgt aus $0 < a < b$ auch $a+b < b+b$, und dann $A(a, b) = \frac{a+b}{2} < b$. Zusammen folgt

$$a < G(a, b) < A(a, b) < b.$$

Aufgabe 2. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv definierte Folgen mit $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_{n+1} = G(a_n, b_n)$ und $b_{n+1} = A(a_n, b_n)$ (siehe Aufgabe 1). Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n. \quad ^1$$

Beweis: Wir zeigen per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage gilt:

$$0 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n.$$

$n = 1$: Da $0 < 1 < 2$ folgt mit Aufgabe 1, dass $1 < G(1, 2) < A(1, 2) < 2$ gilt, und damit folgt $0 < a_1 < a_2 < b_2 < b_1$.

$n \rightarrow n+1$: Für $n \in \mathbb{N}$ sei bereits gezeigt, dass die Behauptung gilt. Dann folgt insbesondere, dass $0 < a_{n+1} < b_{n+1}$. Mit Aufgabe 1 folgt dann

$$0 < a_{n+1} < G(a_{n+1}, b_{n+1}) < A(a_{n+1}, b_{n+1}) < b_{n+1}.$$

Da $a_{n+2} = G(a_{n+1}, b_{n+1})$ und $b_{n+1} = A(a_{n+1}, b_{n+1})$ folgt damit auch

$$0 < a_{n+1} < a_{n+2} < b_{n+2} < b_{n+1}.$$

Damit ist die gewünschte Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

¹Zur Lösung dürfen Sie die Aussage von Aufgabe 1 benutzen, auch wenn Sie diese dort nicht bewiesen haben!

Aufgabe 3. Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in Aufgabe 2. Zeigen Sie: Die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind konvergent und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.²

Beweis: Aus Aufgabe 2 folgt insbesondere, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, und dass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Ferner folgt

$$1 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkte monotone Folgen. Nach einem Satz der Vorlesung folgt hieraus, dass beide Folgen konvergent sind. Seien nun $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Nach den Rechenregeln für konvergente Folgen gilt dann

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Da $b = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2b = a + b \Leftrightarrow b = a$, folgt $a = b$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie: Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist $a = \sup(M) < \infty$, so existiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Beweis: Nach Definition von $\sup(M)$ ist a die kleinste obere Schranke von M . Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $a - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von M ist. Dann existiert aber zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in M$ mit $a_n > a - \frac{1}{n}$. Da $a = \sup(M)$ eine obere Schranke von M ist, gilt auch $a_n \leq a$. Dann folgt $|a_n - a| = a - a_n < \frac{1}{n} \rightarrow 0$, also $a_n \rightarrow a$.

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung. Es existiere ein $L \geq 0$ mit $|f(z) - f(w)| \leq L|z - w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: f ist stetig.

Beweis: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig vorgegeben, und sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in \mathbb{C} mit $z_n \rightarrow z_0$. Dann folgt

$$|f(z_n) - f(z_0)| \leq L|z_n - z_0| \rightarrow 0,$$

denn $z_n \rightarrow z_0$ ist nach Vorlesung äquivalent zu $|z_n - z_0| \rightarrow 0$ und das Produkt einer Nullfolge mit der Konstanten L ist auch eine Nullfolge. Dann folgt auch $|f(z_n) - f(z_0)| \rightarrow 0$ und damit $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$. Damit ist f in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ stetig und damit stetig.

Alternativ: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig vorgegeben und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei o.B.d.A. $L > 0$ (gilt die Ungleichung in der Aufgabe für $L = 0$, so auch für $L = 1 > 0$). Setze dann $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Dann folgt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq L|z - z_0| < L\delta = \varepsilon.$$

Die Stetigkeit von f in z_0 folgt dann mit dem $\varepsilon - \delta$ -Kriterium. Damit ist f in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ stetig und damit stetig.

Notenspiegel

Punktzahl	0–9	10–19	20–21	22–23	24–26	27–28	29–30	31–33	34–35	36–37	38–40	41–45
Note	6,0	5,0	4,0	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,7	1,3	1,0
Ergebnis	24	47	6	3	4	4	2	1				

²Sie dürfen hierzu die Aussagen der Aufgaben 1 und 2 benutzen.