## Ergänzung zur Vorlesung “Mathematik für Physiker I” WS06/07

In dieser Ergänzung möchte ich einen Beweis für den folgenden Satz aus der Vorlesung angeben:

**Satz 2.17** Sei $M$ eine Menge. Dann sind äquivalent:

**(a)** $M$ ist abzählbar unendlich.
**(b)** Es existiert eine bijekive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$.

Für den Beweis ist es sehr wichtig, zunächst eine grundsätzliche Eigenschaft der natürlichen Zahlen zu formulieren (die wir allerdings hier nicht beweisen werden):

**Minimumeigenschaft von $\mathbb{N}$.** Jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element. Mit anderen Worten: ist $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$, so existiert ein $k \in A$ mit $k \leq a$ für alle $a \in A$. Wir schreiben dann $k := \min(A)$ (das Minimum von $A$).

Die Idee hierfür ist einfach: Wähle ein beliebiges Element $a \in A$. Betrachte dann den Durchschnitt $\emptyset \neq A \cap \{1, \dots, a\}$. Wir zeigen dann durch Induktion nach $a$, dass jede Teilmenge von $\{1, \dots, a\}$ ein kleinstes Element besitzt (das ist eine leichte Übung). Wähle dann das kleinste Element $k$ aus $A \cap \{1, \dots, a\}$ und überlege, dass dies dann auch das kleinste Element von $A$ sein muss!

Für endliche Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}$ gilt auch die folgende Aussage (was man mit ähnlichen Argumenten zeigen kann):

**Maximumseigenschaft.** Jede endliche nichtleere Teilmenge von $M$ besitzt ein größtes Element. Mit anderen Worten: ist $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ endlich, so existiert ein $g \in A$ mit $a \leq g$ für alle $a \in A$. Wir schreiben dann $g := \max(A)$ (das Maximum von $A$).

**Beweis von Satz 2.17.** Aus **(b)** und der Definition für “abzählbar” folgt sofort, dass $M$ abzählbar ist. Wäre $M$ endlich, so würde ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $g : \{1, \dots, n\} \to M$ existieren, und dann wäre auch $f^{-1} \circ g : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Damit wäre $\mathbb{N}$ endlich. Dann besäße $\mathbb{N}$ aber ein maximales Element $g$. Da $g + 1 \in \mathbb{N}$ ist dies nicht möglich! Also gilt **(b)** $\Rightarrow$ **(a)**.

Zum Beweis von **(a)** $\Rightarrow$ **(b)** sei $M$ abzählbar unendlich. Nach Definition von “abzählbar” existiert dann eine surjektive Abbildung $h : \mathbb{N} \to M$. Für jedes $m \in M$ sei $a_m \in \mathbb{N}$ das kleinste Element des Urbildes $h^{-1}(\{m\})$ der Menge $\{m\} \subseteq M$. Sei $A := \{a_m : m \in M\} \subseteq \mathbb{N}$. Dann ist die Einschränkung $h|_A : A \to M, h|_A(a) = h(a)$ bijektiv. (Zu jedem $m \in M$ ist $a_m \in A$ mit $h(a_m) = m$, also ist $h|_A$ surjektiv. Umgekehrt folgt aus der Konstruktion von $A$, dass für $a, a' \in A$ mit $h(a) = h(a') =: m$ folgt, dass $a$ und $a'$ kleinstes Element von $f^{-1}(\{m\})$ sind. Das liefert $a \leq a'$ und $a' \leq a$, also $a = a'$.)

Wir zeigen nun: Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ eine nichtendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$, so existiert eine bijektive Abbildung $g : \mathbb{N} \to A$. Ist dann $A$ wie oben, so ist $f = h \circ g : \mathbb{N} \to M$ die im Satz gesuchte bijektive Abbildung!

Wir definieren $g : \mathbb{N} \to A$ rekursiv: Ist $k_1 \in A$ das kleinste Element, so setzen wir $g(1) := k_1$. Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $g(1), \ldots, g(n)$ bereits konstruiert, so setze $A_{n+1} := A \setminus \{g(1), \ldots, g(n)\} \subseteq \mathbb{N}$. Ist dann $k_{n+1}$ das kleinste Element in $A_{n+1}$, so setze $g(n+1) := k_{n+1}$.

Wir behaupten: die so definierte rekursive Funktion $g : \mathbb{N} \to A$ ist bijektiv! Dazu beweisen wir zunächst durch Induktion nach $n$: Ist $l < n$, so gilt $g(l) < g(n)$ (dann folgt $g$ ist injektiv). Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen (da kein $l \in \mathbb{N}$ existiert mit $l < 1$). Ist die Behauptung wahr für $n$, so auch für $n + 1$, denn ist $l < n + 1$, so folgt zunächst $l \leq n$, und dann auch $g(l) \leq g(n)$ (ist $l < n$, so folgt $g(l) < g(n)$ nach der Induktionsvoraussetzung, und ist $l = n$, so gilt natürlich auch $g(l) = g(n)$). Es genügt dann zu zeigen, dass $g(n) < g(n + 1)$. Nach Konstruktion von $g$ ist $g(n) = \min(A_n)$ für $A_n := A \setminus \{g(1), \ldots, g(n-1)\}$. Damit folgt $g(n) < a$ für alle $a \in A_n$ mit $a \neq g(n)$, und dann folgt $g(n) < a$ für alle $a \in A_{n+1} = A_n \setminus \{g(n)\}$. Da $g(n+1) \in A_{n+1}$ folgt also $g(n) < g(n+1)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $g : \mathbb{N} \to A$ surjektiv ist. Wir zeigen dies mit einem Widerspruchsbeweis: nehme an, dass $g : \mathbb{N} \to A$ nicht surjektiv ist. Dann gilt $\emptyset \neq A \setminus g(\mathbb{N}) =: B$. Sei $b := \min(B)$. Dann folgt $C := A \cap \{1, \ldots, b-1\} \subseteq g(\mathbb{N})$. Sei $c := \max(C)$ (existiert, da $C$ endlich). Ist dann $n \in \mathbb{N}$ mit $g(n) = c$, so folgt $C := \{g(1), \ldots, g(n)\}$, denn wäre $a \in C$ mit $a \notin \{g(1), \ldots, g(n)\}$, so würde ein $l \in \mathbb{N}$ existieren mit $g(l) = a$ (da $C \subseteq g(\mathbb{N})$). Wäre $l > n$, so wäre auch $a = g(l) > g(n)$ nach dem oben gezeigten. Dies wäre aber ein Widerspruch zu $c = \max(C)$ und $a \in C$. Damit folgt: $A \setminus \{1, \ldots, b-1\} = A \setminus C = A \setminus \{g(1), \ldots, g(n)\} = A_{n+1}$ und dann folgt $g(n+1) = \min(A_{n+1}) = b$. Dies ist ein Widerspruch zu $b \in A \setminus g(\mathbb{N})$. $\square$