<u>Matematik für Physiker II</u> (1)

Nachtrag zur MfP I:

§26 <u>Ableiten und Integration von Potenzreihen</u>

In diesem Abschnitt wollen wir ein Verfahren angeben, wie man genügend oft diff'b. Fkt. in einer kleinen Umgebung um einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ durch ein Polynom approximieren kann, bzw. (noch besser), wann man eine gegeb. Fkt $f: I \to \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $x_0 \in I$ entwickeln kann.

Wir benötigen zunächst einige Vertauschungssätze für Integration und Ableitung von Grenzfkt. oder Fkt.-Folgen:

<u>Erinnerung</u>: Sind $f_n: D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $f: D \to \mathbb{C}$ Fkt, so haben wir definiert:

(1) $(f_n)_n$ konv. punktw. gegen f, falls $f_n(z) \to f(z)$ $\forall z \in D$.

(2) $(f_n)_n$ konv. <u>gleichmäßig</u> gegen f, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ ex mit $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$ $\forall z \in D$.

(3) Def. wir $\|g\|_\infty = \sup\{|g(z)| \mid z \in D\}$ für $g: D \to \mathbb{C}$, so gilt $f_n \xrightarrow{glm} f$ auf $D \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0$

($\|\cdot\|_\infty$ heißt Supremumsnorm).

Ferner haben wir in §12 die folgenden Sätze gelernt:

<u>Satz</u> (12.3) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konv.-Radius $R > 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n (z-z_0)^n$. Dann gilt für alle $0 < r < R$: $f_k \xrightarrow{glm} f$ auf $B_r(z_0)$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

<u>Satz</u> (12.4) Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : D \to \mathbb{C}$ stetig und f_n konv. glm. gegen $f: D \to \mathbb{C}$, so ist auch f stetig.
(Glm. Limiten stetiger Fkt. sind stetig.)

Wir ergänzen diese Resultate nun durch

<u>20.1 Satz</u> Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrierbare Fkt. mit f_n konv. glm. gegen f.
Dann gilt $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.
(Sind alle f_n stetig, so auch f stetig und intb.)

<u>Bew:</u> Wegen $|f_n(z) - f(z)| \le \|f_n - f\|_\infty \to 0$, da $f_n \xrightarrow{glm} f$ gilt

$$\left| \int_a^b f_n(z)\,dz - \int_a^b f(z)\,dz \right| \le \int_a^b |f_n(z) - f(z)|\,dx \le \int_a^b \overbrace{\|f_n - f\|_\infty}^{\text{konstant}}\,dz$$

$$= (b-a)\|f_n - f\|_\infty \to 0.$$ ∎

Hieraus folgt jetzt sofort die folgende Aussage für Ableitungen:

<u>20.2 Satz</u> Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f_n, f : I \to \mathbb{C}$ Funktionen mit
(1) f_n konv. <u>punktweise</u> gegen f (also $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in [a,b]$)
(2) Alle f_n sind stetig diffb (also f_n' stetig) und es ex. ein $g : I \to \mathbb{C}$ mit $(f_n')_n$ konvergiert glm. gegen g auf $[x_0, x]$ (bzw $[x, x_0]$) $\forall x \in I$.

Dann ist f stetig diffb. und $f' = g$ auf I.
<u>Bew:</u> Nach dem Hauptsatz der Diff und Integralrechnung (18.3) folgt:

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \xrightarrow{20.1} \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt.$$

Da $(f_n)_n$ pktw. gegen f konvergiert, gilt auch $f_n(x) \to f(x)$ und $f_n(x_0) \to f(x_0)$. Damit folgt

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \quad \text{und dann}$$

$$f'(x) = \left(f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\right)' = g(x) \quad \forall x \in I.$$

Also ist f diffb. mit $f' = g$. Da alle f_n' stetig und $f_n' \to g$ glm. auf $[x_0, x]$ $\forall x \in I$ ist auch g stetig auf $[x_0, x]$ $\forall x \in I$ nach 12.9. Dann ist g stetig auf I. ∎

Wir wenden den Satz jetzt an auf Potenzreihen:

20.3 Satz Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit EWP $x_0 \in \mathbb{R}$ und Konvergenzradius $R > 0$. Sei $f: (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{C}$ die Fkt. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Dann gelten:

(1) f ist stetig diffb. mit $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ für alle $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

(2) Ist $F: (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{C}$ def. durch $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$, so ist F Stammfkt. zu f.

Bew: Zunächst gilt, dass die Reihen für f' und F ebenfalls den Konv-Radius R haben, also auf $(x_0 - R, x_0 + R)$ konvergieren, denn es gilt

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim}\Big(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \sqrt[n]{|a_n|}\Big) = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = R$$

und $$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \overline{\lim} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}}_{\to 1 \text{ (siehe unten)}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = R.$$

$\left(\sqrt[n]{n} \le \sqrt[n]{n+1} \le \sqrt[n]{2n} \text{ und } \sqrt[n]{n} \to 1,\ \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n} \to 1\right)$

Setze nun $f_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n (x-x_0)^n$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$

Dann folgt $f_k \to f$ punktweise auf (x_0-R, x_0+R) und $f_k'(x) = \sum_{n=1}^{k} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ konv. glm. gegen g auf $[x_0-r, x_0+r]$ $\forall\, 0<r<R$ nach 12.3 (s.o.). Mit $r = |x-x_0|$ für $x \in I$ folgt dann auch $f_k' \to g$ glm. auf $[x_0, x]$ (bzw. $[x, x_0]$) $\forall x \in I$. Da alle f_k' stetig $f' = g$ mit 20.2.

Aussage (2) folgt sofort aus (1) angewandt auf F. ∎

<u>20.4 Bemerkung</u> Man kann Satz 20.3 nicht nur zur Berechnung von Stammfkt. und Ableitungen von Potenzreihen benutzen, sondern manchmal auch dazu, geg. Fkt. in eine Potenzreihe zu entwickeln:

<u>Bsp</u>: Wir wissen: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$.
Damit folgt

$$\ln'(1+x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \overset{\text{für } |x|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Nach 20.3 ist dann $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ auch eine Stammfkt. von $\frac{1}{1+x}$. Also ex. eine Konstante c mit

$$\ln(1+x) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Einsetzen von $x=0$ liefert $0 = c + 0$, also $c = 0$.
Damit folgt

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \forall x \in (-1,1).$$

An dieser Stelle möchte ich ohne Bew. einen wichtigen Satz angeben, der es oft ermöglicht gewisse Reihenwerte zu berechnen:

20.5 (Abelscher Grenzwertsatz) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$. Dann gilt: Konvergiert die Reihe für $x = x_0+R$ (bzw. $x = x_0-R$), so ist die Fkt.
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ stetig auf } [x_0, x_0+R]$$
(bzw. auf $[x_0-R, x_0]$.).

Wenden wir diesen Satz auf die obige Entwicklung von $\ln(1+x)$ an, so erhalten wir:

20.6 Folgerung Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

Bew: Die Fkt. $[1,2] \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ sind beide stetig auf $[1,2]$ und stimmen auf $[1,2)$ überein. ∎

20.7 Notation
Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{C}$ eine Fkt., so sagen wir f ist 1-mal diffb. falls f diffb. auf I und wir schreiben dann auch $f^{(1)} := f'$.
Rekursiv def. wir dann: Ist $n \in \mathbb{N}$, $n>1$, so heißt f n-mal diffb. falls f $(n-1)$-mal diffb. und $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}: I \to \mathbb{C}$ wieder diffb. auf I.
Wir setzen dann $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.
f heißt ∞-oft diffb., falls f n-mal diffb. für alle $n \in \mathbb{N}$. f heißt n-mal stetig diffb., falls f n-mal diffb. und $f^{(n)}$ stetig ist.

(Ist f ∞-oft diffb., so ist f auch n-mal stetig diffb. für alle $n \in \mathbb{N}$! Warum?)

Achtung: Für $n=0$ setzen wir $f^{(0)} = f$!

Aus Satz 20.3 folgt nun sofort.

20.8 Satz Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit EWP $x_0 \in \mathbb{R}$ und Konv-Radius $R > 0$. Dann ist die Fkt. $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{C}$ ∞-oft diffb. mit $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-x_0)^{n-k} \ \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

Insb. folgt $f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Bew: Folgt aus k-facher Anwendung von 20.3 auf f:

$$f'(x) \overset{20.3}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \overset{20.3}{\Longrightarrow} f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$$

$$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k}$$

Die Beh folgt dann mit $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ ∎

~~Problem: Sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine Fkt, und $x_0 \in I$. Wann lässt sich f in einer Umgebung um x_0 als Potenzreihe schreiben (mit EWP x_0).~~

~~Aus den obigen Resultaten folgt:~~

- ~~f muss ∞-oft diffb. sein.~~
- ~~Die einzige Reihe, die in Frage kommt ist dann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ mit $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$~~

~~Diese Reihe heißt die Taylorreihe von f im Punkt x_0.~~

§21 Taylorformel und Taylorreihen

Problem: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$, $f: I \to \mathbb{C}$.
Wann lässt sich f in einer Umgebung um x_0 als Potenzreihe mit EWP x_0 schreiben?

Aus den obigen Resultaten folgt:

(a) f muss ∞-oft diffb sein.

(b) Die einzige Reihe, die in Frage kommt ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ mit $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ in (b) heißt die Taylorreihe von f im EWP x_0.

Die Frage ist also, für welche $x \in I$ die Taylorreihe von f gegen $f(x)$ konvergiert. Selbst wenn die Reihe konvergiert, kann der Grenzwert ein völlig anderer sein:

Bsp: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. durch $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \end{cases}$

Skizze

Man kann dann nachrechnen: f ist ∞-oft diffb mit $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, d.h. die Koeffizienten a_n der Reihe in (b) sind alle gleich 0. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 0 (x-x_0)^n$ konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ gegen 0.

Aber: $f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$!

21.1 Satz (Taylorformel)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes Intervall, $x_0 \in I$ und $f: I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig diffb. Dann gilt für alle $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

mit $R_{n+1}(x) := \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$.

Bew: Induktion nach n:
$n=0$: Hauptsatz der Integral + Diff. Rechnung liefert:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x_0) + \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^0 f^{(1)}(t)\,dt. \checkmark$$

$n \to n+1$: Sei f $(n+2)$-mal stetig diffb. Nach Ind-Vor. gilt:

$$\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right) = R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Mit partieller Integration folgt:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = -\frac{1}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + R_{n+2}(x).$$

Einsetzen liefert Beh! ∎

21.2 Folgerung: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ ein $(n+1)$-mal stetig diffb. Fkt. mit $f^{(n+1)}(x) = 0\ \forall x \in I$. Dann ist f ein Polynom!
Bew: Da $f^{(n+1)} \equiv 0$ gilt $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{=0}\,dt = 0$,
also $f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

[Umgekehrt liefert gilt für jedes Polynom $p: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit grad$(p) = 0$ und für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$: $p(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$]

21.3 <u>Bemerkung</u>: Ist $f: I \to \mathbb{C}$ ∞-oft diffb, so gilt die Taylorformel für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x_0 \in I$ fest und $x \in I$ gilt dann:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \iff \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)$$

$$= R_{n+1}(x) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Das heißt das Restglied R_{n+1} liefert die Antwort auf das am Anfang gestellte Problem!

Um $R_{n+1}(x) \to 0$ für $n \to \infty$ zu zeigen, ist es oft nützlich andere Darstellungen des Restglieds zu verwenden.

21.4 <u>Satz</u> (Lagrangesche Form des Restglieds)

Sei $f: I \to \mathbb{C}$ $n+1$-mal stetig diffb. und $x_0 \in I$ fest. Dann ex. zu jedem $x \in I$ ein $\xi_x \in [x_0, x]$ (bzw. $\xi_x \in [x, x_0]$ falls $x < x_0$) mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

<u>Achtung</u>: Die Stelle ξ_x hängt von x ab!

<u>Bew</u>: Nach dem MWS der Integralrechnung angewandt auf $g(t) = (x-t)^n$ ex. ein $\xi_x \in [x_0, x]$ (bzw. $[x, x_0]$) mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_x) \int_{x_0}^{x} (x-t)^n\,dt$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_x)\left(-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}\right)\Big|_{x_0}^{x}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)(x-x_0)^{n+1} \qquad \blacksquare$$

Es gibt noch andere Formen des Restglieds, die manchmal nützlich sind (siehe z.B. Heuser).

Wir wollen ein wichtiges Beispiel angeben:

<u>21.5</u> (Binomialreihe) Sei $s \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Fkt. $f: (-1,\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = (1+x)^s$

<u>Ziel</u> a) Berechne Taylorreihe von f im EWP 0!

b) Untersuche wo die Reihe gegen f konvergiert?

<u>1. Fall</u>: $s = n \in \mathbb{N}_0$: Dann $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ (Binom. Formel) und dann ist dies die Taylorreihe

<u>2. Fall</u>: $s \notin \mathbb{N}_0$: Dann gilt $f'(x) = s(1+x)^{s-1}$

Induktion nach k liefert dann:

$$f^{(k)}(x) = s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1)(1+x)^{s-k}, \; k \in \mathbb{N}.$$

Setzen wir dann

$$\binom{s}{0} := 1, \; \binom{s}{k} := \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}, \; k = 1,2,3,\ldots$$

so folgt $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{s}{k}$ für $k = 0,1,2,\ldots$, also ist die Taylorreihe von f im EWP 0 die Reihe

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k$$

Diese Reihe heißt <u>Binomialreihe</u>, und $\binom{s}{k}$ heißt k-ter <u>Binomialkoeffizient</u> von s. (Ist $s \in \mathbb{N}$, so stimmt dies mit der alten Def. überein!).

<u>21.6 Satz</u> Sei $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$. Dann konvergiert die Binomialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k$ gegen $f(x) = (1+x)^s \; \forall x \in (-1,1)$.

<u>Bew</u>: Wir beweisen den Satz für den Fall $s = \frac{1}{2}$ (der allg. Fall ist etwas aufwändiger). Nach obiger Rechnung gilt für das Lagrange-Restglied (mit $x_0 = 0$)

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(\xi_x) x^{n+1} \overset{s.o.}{=} \binom{\frac{1}{2}}{n+1} (1+\xi_x)^{\frac{1}{2}-(n+1)} x^{n+1}$$

für ein $\xi_x \in [0,x]$ (bzw. $\xi_x \in [x,0]$ für $x < 0$).

Wir haben für $k \in \mathbb{N}$:

$$k \cdot \binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1) \cdot \ldots \cdot (\frac{1}{2}-k+1)}{(k-1)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{-\frac{3}{2}}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{\frac{3}{2}-k}{k-1}$$

und damit gilt $|k\binom{\frac{1}{2}}{k}| \le 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$. (*)

Im Fall $0 \le x < 1$ folgt dann:

$$|R_{n+1}(x)| \le \sqrt{1+\xi_x} \left|\frac{x}{1+\xi_x}\right|^{n+1} \le \sqrt{2}\, x^{n+1} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

2. Fall: $-1 < x < 0$. Hier benutzen wir die Integral-Formel für das Restglied:

$$|R_{n+1}(x)| = \left|\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\right|$$

$$= \left|(n+1)\binom{\frac{1}{2}}{n+1}\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\frac{1}{2}-(n+1)}\,dt\right|$$

(*) und Subst $t \to -t$:

$$\le \left|\int_0^{|x|} (x+t)^n (1-t)^{\frac{1}{2}-(n+1)}\,dt\right|$$

$$\le \int_0^{|x|} \left|\frac{x+t}{1-t}\right|^n \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt$$

Wegen $t \le |x|$ und $x < 0$ gilt $x+t \le 0$, also $|x+t| = -x-t = |x|-t$. Wegen $0 \le t \le |x| < 1$ folgt dann $|x|-t \le |x| - t|x| = |x|(1-t)$, also $\frac{|x|-t}{1-t} \le |x|$.

Damit folgt:

$$|R_{n+1}(x)| \le \int_0^{|x|} \underbrace{\left(\frac{|x|-t}{1-t}\right)^n}_{\le |x|^n} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt \le |x|^n \int_0^{|x|} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt \to 0$$

für $n \to \infty$. ∎

21.7 Aufgabe: Stellen Sie die Fkt. $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arcsin(x)$

sowie die Fkt. $\arctan: (-1,1) \to \mathbb{R}$

als Potenzreihe dar!