§16 Selbstadjungierte, normale und unitäre Abbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir lineare Abbildungen zwischen unitären (bzw. euklidischen) VR betrachten, d.h. unsere VR sind zusätzlich mit einem Skalarprodukt versehen. Wir starten mit einer einer sehr leichten Beschreibung der Darst.-Matrix $A_F^{B,\tilde{B}}$ einer lin. Abb. $F: V \to W$, wenn $B = \{v_1, .., v_n\}$, $\tilde{B} = \{w_1, .., w_n\}$ ONB bzgl. der auf V und W geg. Skalarprodukte sind:

16.1. Seien $(V, <,>)$ und $(W, <,>)$ unitäre (bzw. eukl) $\mathbb{K}$-VR (dann ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$). Ferner sei $B = \{v_1, .., v_n\}$ ein ONB von V und $\tilde{B} = \{w_1, .., w_m\}$ eine ONB von W und sei $F: V \to W$ linear.
Ist dann $A_F^{B,\tilde{B}} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, so gilt

$$a_{ij} = \langle F(v_j), w_i \rangle$$

Bew: Nach Def. für $A_F^{B,\tilde{B}}$ gilt: $A v_j = \sum_{\ell=1}^m a_{\ell j} w_\ell$. Da $\{w_1, .., w_m\}$ ein ONB für W folgt

$$\langle F(v_j), w_i \rangle = \langle \sum_{\ell=1}^m a_{\ell j} w_\ell, w_i \rangle = \sum_{\ell=1}^m a_{\ell j} \underbrace{\langle w_\ell, w_i \rangle}_{= \delta_{\ell i}} = a_{ij}. \blacksquare$$

16.2. Satz Seien $(V, <,>)$ und $(W, <,>)$ unitäre (eukl.) $\mathbb{K}$-VR mit $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$. Dann gelten:

(1) Ist $F: V \to W$ linear, so ex. genau eine lin. Abb. $F^*: W \to V$ mit

$$\langle Fv, w \rangle = \langle v, F^* w \rangle \quad \forall v \in V, w \in W.$$

(2) Sind $B = \{v_1, .., v_n\}$ und $\tilde{B} = \{w_1, .., w_m\}$ ONB für V bzw. W, so gilt $A_{F^*}^{\tilde{B},B} = (A_F^{B,\tilde{B}})^*$, wobei

wir für jede Matrix $A \in M(m\times n, \mathbb{K})$ die Matrix $A^* \in M(n\times m, \mathbb{K})$ definieren durch

$$A^* = \bar{A}^T$$

[Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ 2-i & 2 & 3+i \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ -i & 2 \\ 1-i & 3-i \end{pmatrix}$]

Bew: Seien B und $\widetilde{B}$ wie in (2). Sei $A = A_F^{B,\widetilde{B}}$ und sei $A^* \in M(n\times m, \mathbb{K})$ wie oben. Dann ex. genau ein lin. Abb. $F^*: W \to V$ mit $A^* = A_{F^*}^{\widetilde{B},B}$. F^* ist festgelegt durch die Vorschrift

$$F^*(w_i) = \sum_{k=1}^n a^*_{ki} v_k = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik} v_k. \qquad \left(A^* = (a^*_{k\ell})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le \ell\le m}} = (\bar{a}_{\ell k})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le \ell\le m}} \right)$$

Es folgt dann für alle $1\le j\le n$, $1\le i\le m$:

$$\langle v_j, F^*(w_i)\rangle = \langle v_j, \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik} v_k\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ik} \underbrace{\langle v_j, v_k\rangle}_{\delta_{jk}} = a_{ij}$$

$$\overset{16.1.}{=} \langle F(v_j), w_i\rangle.$$

Sind dann $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j$, $w = \sum_{i=1}^m \mu_i w_i$ beliebig, so folgt

$$\langle F(v), w\rangle = \langle F(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j), \sum_{i=1}^m \mu_i w_i\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_j \bar{\mu}_i \langle F(v_j), w_i\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_j \bar{\mu}_i \langle v_j, F^*(w_i)\rangle = \langle \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j, F^*(\sum_{i=1}^m \mu_i w_i)\rangle$$

$$= \langle v, F(w)\rangle.$$

Dies beweist die Existenz von F^* und (2). Die Eindeutigkeit folgt dann daraus, dass für jede lin. Abb. $G: W \to F$ mit $\langle F(v), w\rangle = \langle v, G(w)\rangle \ \forall v\in V, w\in W$ gilt, dass $A_G^{\widetilde{B},B} = A_{F^*}^{\widetilde{B},B} = A^*$, denn nach 16.1 gilt für $\widetilde{A} = A_G^{\widetilde{B},B}$:

$$\tilde{a}_{ji} = \langle G(w_i), v_j\rangle = \overline{\langle v_j, G(w_i)\rangle} = \overline{\langle F(v_j), w_i\rangle} = \bar{a}_{ij},$$

also $\widetilde{A} = A^*$. ∎

16.3 Bem (1) Insbesondere folgt für $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$, jeweils mit Standard-Skalarprodukt, und für alle $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle \quad \forall x \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^m$$

Wende dazu 16.2 auf $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$; $F(x) = Ax$ bzgl. der Standardbasen $\mathcal{S}_n = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{S}_m = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m\}$ von $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$ an. Dann ist $F^*: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ geg. durch $F^*(y) = A^* y$.

(2) Siehe Rückseite (119 b)

16.4 Definition (1) Seien $(V, \langle\,,\rangle)$ und $(W, \langle\,,\rangle)$ endl. dim. unitäre (bzw. eukl.) VR und sei $F: V \to W$ linear. Dann heißt die Abb. $F^*: W \to V$ aus 16.2 (1) die zu F adjungierte Abbildung.

(2) Ist $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$, so heißt $A^* = \bar{A}^T$ die zu A adjungierte Matrix.

Wir wollen uns von nun an hauptsächlich mit dem Fall $V = W$ beschäftigen, also wenn $F: V \to V$ ein Endomorphismus ist. Wir def. dann

16.5 Definition Sei $(V, \langle\,,\rangle)$ endl. dim. unitärer (bzw. eukl.) $\mathbb{K}$-VR und sei $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann:

(1) F heißt selbstadjungiert, falls $F = F^*$ (dh. falls $\langle F(v), w\rangle = \langle v, F(w)\rangle \ \forall v, w \in V$)

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nennt man F dann auch symmetrisch.

(2) F heißt unitär (oder orthogonal, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) wenn $F \circ F^* = F^* \circ F = \mathrm{id}_V$ (also $F^* = F^{-1}$)

(3) F heißt normal, falls $F \circ F^* = F^* \circ F$

Es folgt sofort: Ist F selbstadj oder unitär, so ist F auch normal.

(4.19) Sind V und W unitäre (bzw. eukl.) VR und sind $F, G : V \to W$ linear, $\lambda \in \mathbb{K}$, so gilt

$$(F + G)^* = F^* + G^*$$
$$(\lambda F)^* = \bar{\lambda} F^*$$

<u>Denn</u>: $\langle (F+G)v, w\rangle = \langle Fv, w\rangle + \langle Gv, w\rangle$
$= \langle v, F^*w\rangle + \langle v, G^*w\rangle$
$= \langle v, (F^*+G^*)(w)\rangle \quad \forall\, v \in V, w \in W$

Ebenso: $\langle (\lambda F)(v), w\rangle = \langle F(v), \bar{\lambda} w\rangle$
$= \langle v, F^*(\bar{\lambda} w)\rangle$
$= \langle v, \bar{\lambda} F^*(w)\rangle \ \forall$

Entsprechend def. wir für Matrizen $A \in M(n\times n, \mathbb{K})$:

(1) A heißt selbstadjungiert, falls $A^* = A$.
Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so heißt A dann auch symmetrisch.

(2) A heißt unitär (bzw. orthogonal, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) falls $A^* A = A \cdot A^* = E_n$, also $A^* = A^{-1}$!

(3) A heißt normal, falls $A^* A = A A^*$.

16.6 Bem: Ist $(V, \langle\, ,\rangle)$ unitär (bzw. eukl.) und ist $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine ONB von V, so folgt leicht aus 16.2: Ein $F \in \mathrm{End}(V)$ ist selbstadjungiert (bzw. unitär od. orthogonal, bzw. normal) g.d.w. $A_F^{\mathcal{B}} = A_F^{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ selbstadj. (bzw. unitär od. orthog. bzw. normal) ist.

16.7 Bsp (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 3 \\ 1-i & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ist selbstadjungiert, da $A = \bar{A}^T \ (= A^*)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ ist nicht selbstadj., da $\bar{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \neq A$.

(2) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist
$O(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ orthogonal, denn

$$O(\alpha)^* O(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{ausrechnen}}{=} O(\alpha) O^*(\alpha)$$

(Drehung mit Winkel α.) Ebenso ist

$O = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ orthogonal (und selbstadjungiert)
(Spiegelung um Diagonale!)

Wir wollen noch einige Eigenschaften von orthogonalen und unitären Abb. bzw. Matrizen untersuchen:

16.8 Satz Sei $(V, <,>)$ ein endl. dim. unitärer (bzw. eukl.) $\mathbb{K}$-VR und sei $F \in End(V)$. Dann sind äquivalent:

(1) F ist unitär (bzw. orthogonal)

(2) Es gilt $\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle \; \forall v, w \in V$.

(3) Ist $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine beliebige ONB von V, so ist auch $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ eine ONB von V.

(4) (ohne Beweis) $\|F(v)\| = \|v\| \; \forall v \in V$ $(\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle})$.

Bew: (1) ⇒ (2) Da $F^* = F^{-1}$ gilt für alle $v, w \in V$:
$$\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, F^*(F(w))\rangle = \langle v, F^{-1} \circ F(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$
(2) ⇒ (3) Ist $\dim(V) = n$, so ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine ONB g.d.w. $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$. Wegen $\langle F(v_i), F(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$ ist dann auch $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ eine ONB.

(3) ⇒ (1) Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ONB von V und sei $\tilde{B} = \{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$. Dann folgt $A_F^{B, \tilde{B}} = E_n$ und dann auch $A_{F^*}^{\tilde{B}, B} = E_n^* = E_n$. Es folgt
$$A_{F^* \circ F}^{B, B} = A_{F^*}^{\tilde{B}, B} \cdot A_F^{B, \tilde{B}} = E_n \cdot E_n = E_n = A_{id_V}^{B, B},$$
und damit $F^* \circ F = id_V$, da eine lin. Abb. eind. durch die Darst.-Matrix festgelegt ist. Analog folgt $F \circ F^* = id_V$, also $F^* = F^{-1}$. ∎

Für unitäre Matrizen gilt der folgende schöne Satz:

16.9 Satz Sei $O \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Dann sind äquivalent:

(1) O ist unitär (bzw. orthogonal)

(2) Die Spalten $o_1, \dots, o_n$ von O bilden eine ONB von $\mathbb{R}^n$ bzgl. des Standard-Skalarprodukts auf $\mathbb{K}^n$

(3) Die Zeilen $o^1, \dots, o^n$ von O bilden eine ONB von $\mathbb{R}^n$ bzgl. des Standard-Skalarprodukts auf $\mathbb{K}^n$

Bew: Sei o.B.d.A. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $O^* = \bar{O}^T$

Da O unitär, d.h. $\bar{O}^T O = O\bar{O}^T = E_n$ folgt: Sind $o_1, \dots, o_n$ die Spalten von O, so ist $\bar{O}^T O = E_n \iff (\bar{O}^T O)_{ij} = \delta_{ij}$ $\left(= \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\right)$

Aber: $\bar{O}^T O = \begin{pmatrix} \bar{o}_1^T \\ \vdots \\ \bar{o}_n^T \end{pmatrix} (o_1, \dots, o_n)$

$= (\bar{o}_i^T o_j)_{1 \le i,j \le n}$

$= (\langle \bar{o}_i, \bar{o}_j \rangle)_{1 \le i,j \le n}$

also folgt $\bar{O}^T O = E_n \iff \delta_{ij} = \langle \bar{o}_i, \bar{o}_j \rangle = \overline{\langle o_i, o_j \rangle}$

$\iff \delta_{ij} = \langle o_i, o_j \rangle$, d.h. $\{o_1, \dots, o_n\}$ ist ONB.

Analog zeigt man:

$O\bar{O}^T = E_n \iff$ die Zeilen von O bilden eine ONB.

Schließlich gilt $O\bar{O}^T = E_n \iff \bar{O}^T O = E_n$, denn sind $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ beliebig mit $AB = E_n$, so gilt $A = B^{-1}$ also $BA = BB^{-1} = E_n$ (siehe §3). ∎

Wir wollen nun sehen, dass zumindest im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alle normalen (und dann auch selbstadj. und unitären) Endomorphismen diagonalisierbar sind. Es gibt dann sogar eine ONB von Eigenvektoren! Wir starten mit:

16.10 Lemma Sei $(V, \langle , \rangle)$ unitärer $\mathbb{C}$-VR und sei $F \in \mathrm{End}(V)$ normal (also $F^* \circ F = F \circ F^*$). Dann gelten:

(1) Ist λ EW von F, so ist $\bar{\lambda}$ EW von F^* und es gilt $E_\lambda(F) = E_{\bar{\lambda}}(F^*)$

(2) Sind λ_1, λ_2 EW von F mit $\lambda_1 \ne \lambda_2$, so gilt $E_{\lambda_1}(F) \perp E_{\lambda_2}(F)$.

Bem: Allgemein kann man zeigen: Ist $(V,\langle,\rangle)$ unitärer (endl.-dim.) VR und ist λ EW zu F, so ist $\bar{\lambda}$ EW zu F^*. Dies folgt z.B. aus

$$P_F(\lambda) = \det(\lambda\,\mathrm{id} - F) = \overline{\det(\bar{\lambda}\,\mathrm{id} - F^*)} = \overline{P_{F^*}(\bar{\lambda})}.$$

Es gilt im allg. aber nicht $E_{\bar{\lambda}}(F^*) = E_\lambda(F)$!

Bsp: $F: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$; $Fx = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist 0 EW von F und $E_0(F) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Ferner gilt $F^*x = A^T x$ und $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann: $E_0(F^*) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$!

Bew. von 16.10: (1) Da F normal, ist auch $\lambda\,\mathrm{id} - F$ normal, denn $(\lambda\,\mathrm{id} - F)^* = \bar{\lambda}\,\mathrm{id} - F^*$ (16.3(2)) und damit folgt

$$(\lambda\,\mathrm{id} - F)(\lambda\,\mathrm{id} - F)^* = (\lambda\,\mathrm{id} - F)(\bar{\lambda}\,\mathrm{id} - F^*)$$
$$= \lambda\bar{\lambda}\,\mathrm{id} - \bar{\lambda}F - \lambda F^* + F \circ F^*$$
$$= \bar{\lambda}\lambda\,\mathrm{id} - \bar{\lambda}F - \lambda F^* + F^* \circ F = \dots = (\bar{\lambda}\,\mathrm{id} - F^*)(\lambda\,\mathrm{id} - F).$$

Nun gilt für alle $G \in \mathrm{End}(V)$ normal, dass

$$\mathrm{Kern}\, G = \mathrm{Kern}\, G^*, \text{ denn}$$

$$v \in \mathrm{Kern}\, G \iff 0 = \langle Gv, Gv \rangle = \langle G^* \circ G v, v \rangle \overset{\text{normal}}{=} \langle G \circ G^* v, v \rangle$$
$$= \langle G^* v, G^* v \rangle$$
$$\iff v \in \mathrm{Kern}\, G^*$$

Mit $G = \lambda\,\mathrm{id} - F$ folgt:

$$E_\lambda(F) = \mathrm{Kr}(\lambda\,\mathrm{id} - F) = \mathrm{Kr}(\lambda\,\mathrm{id} - F)^* = \mathrm{Kr}(\bar{\lambda}\,\mathrm{id} - F^*) = E_{\bar{\lambda}}(F^*).$$

(2) Sind $v \in E_{\lambda_1}(F)$, $w \in E_{\lambda_2}(F)$, so folgt:

$$\lambda_1 \langle v, w \rangle = \langle \lambda_1 v, w \rangle = \langle F(v), w \rangle = \langle v, F^*(w) \rangle$$
$$\overset{(1)}{=} \langle v, \bar{\lambda}_2 w \rangle = \lambda_2 \langle v, w \rangle$$

Dann folgt $0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\langle v, w \rangle$ und da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt $\langle v, w \rangle = 0$. ∎

Wir kommen nun zum zentralen Ergebnis dieses Abschnitts:

Satz

16.11 Sei $(V, \langle , \rangle)$ unitärer $\mathbb{C}$-VR und sei $F \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann besitzt V eine ONB $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ aus Eigenvektoren von F. Insbesondere ist F diagonalisierbar. (124)

Bevor wir den Satz beweisen, notieren wir:

16.12 Folgerung: Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ normal. Dann ex. eine unitäre Matrix $U \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit
$$U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ (Diagonalmatrix)}$$
(Erinnerung: U unitär $\Leftrightarrow U^* = U^{-1}$!).

Bew: Betr. $\mathbb{C}^n$ mit Standard-Skalarprodukt 24 und $F: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $Fx = Ax$. Nach 16.11 ex. ONB $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von $\mathbb{C}^n$ aus EV von F. Ist dann $U = (v_1, \dots, v_n)$, so ist U unitär nach 16.9 und wir wissen, dass
$$U^{-1} A U = U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ ☒

Bew von 16.11: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen EW von F (da $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ex. mindestens ein EW!).
Seien $E_{\lambda_1}(F), \dots, E_{\lambda_k}(F)$ die zugeh. Eigenräume.
Bestimme (etwa mit dem Schmidtschen Verfahren) eine ONB $\{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}$ für $E_{\lambda_i}(F)$ $\forall\, 1 \le i \le k$.
Nach 16.10 gilt $E_{\lambda_i}(F) \perp E_{\lambda_j}(F)$ für $i \neq j$, und damit ist
$B = \{v_{11}, \dots, v_{1n_1}, v_{21}, \dots, v_{2n_2}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{kn_k}\}$ ein Orthonormalsystem aus Eigenvektoren in V.

Zeige: B ist Basis, d.h. zeige $V = LH\{B\}$ $(= \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(F))$.
Sei dazu $W := LH(B) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(V)$.

Dann gilt: $W \neq V \Leftrightarrow W^{\perp} \neq \{0\}$.
Wir zeigen, dass dies zum Widerspruch führt!

Ann $W^\perp \neq \{0\}$?

Dann gilt $F(W^\perp) \subseteq W^\perp$, dh. $F_{|W^\perp} \in \mathrm{End}(W^\perp)$.

Denn: Da $E_{\lambda_i}(F) = E_{\overline{\lambda_i}}(F^*)$ folgt $F^*(E_{\lambda_i}(F)) \subseteq E_{\lambda_i}(F)$, und damit $F^*(W) \subseteq W$, da $W = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(F)$.

Dann folgt für alle $w \in W$ und $v \in W^\perp$:

$$\langle F(v), w\rangle = \langle v, \underbrace{F^*(w)}_{\in W}\rangle = 0, \text{ also } F(v) \in W^\perp.$$

Da $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ besitzt $F_{|W^\perp}$ mindestens einen EW $\mu \in \mathbb{C}$. und dann ex. ein EV $0 \neq v \in W^\perp$ für μ.

Aber dann ist μ auch EW von F, dh. es ex. $i \in \{1,\dots,k\}$ mit $\mu = \lambda_i$, und dann folgt $v \in E_{\lambda_i}(F)$

Es folgt: $0 \neq v \in W \cap W^\perp$ Widerspruch! ∎

Wir wollen nun die reelle Situation untersuchen.
Sei also im Folgenden $(V, \langle\,,\,\rangle)$ ein endl. dim. euklidischer $\mathbb{R}$-VR und sei $F \in \mathrm{End}(V)$ normal.
Dann ist F nicht immer über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar!

Bsp: $V = \mathbb{R}^2$ mit Standard-Skalarprodukt

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x) = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ist nicht über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar, da $P_F(\lambda) = \lambda^2 + 1$ keine reelle Nullst. besitzt.

Aber A (und dann auch F) ist normal, da $A^* = A^T = -A$ und damit $A^*A = -A^2 = AA^*$.

Nach 16.11 ist F (bzw. A) als Abb. $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar. Wir wollen diese Beob. nutzen, um allg. normale Endom. über eukl. VR zu untersuchen.

16.13 Lemma + Def. Sei $(V, \langle\,,\,\rangle)$ ein euklidischer VR.
Sei $V_{\mathbb{C}} = \{ v + iw \mid v, w \in V \}$ (Formale Summe)
versehen mit der Addition

$$(v_1 + iw_1) + (v_2 + iw_2) = (v_1 + v_2) + i(w_1 + w_2)$$

der Mult. mit Skalaren $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$:

$$(a+ib)\cdot(v+iw) = (av - bw) + i(bv + aw)$$

(einfach formal ausmultiplizieren) und dem $\mathbb{C}$-wertigen Skalarprodukt

$$\langle v_1 + iw_1, v_2 + iw_2 \rangle_{\mathbb{C}} = (\langle v_1, v_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle) + i(\langle w_1, v_2 \rangle - \langle v_1, w_2 \rangle)$$

(ebenfalls formal nach den Rechenregeln für $\mathbb{C}$-wertige Skalarprodukte ausrechnen).

Dann gilt $(V_{\mathbb{C}}, \langle\,,\,\rangle_{\mathbb{C}})$ ist ein unitärer $\mathbb{C}$-VR mit $\dim_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{R}}(V)$. Ist $F \in \mathrm{End}(V)$, so wird durch

$$F_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}\,;\; F_{\mathbb{C}}(v + iw) = Fv + iFw$$

ein Element $F_{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})$ definiert.

Bezeichnung: $(V_{\mathbb{C}}, \langle\,,\,\rangle_{\mathbb{C}})$ heißt die Komplexifizierung von $(V, \langle\,,\,\rangle)$ und $F_{\mathbb{C}}$ heißt die Komplexifiz. von F.

16.14 Bsp: Ist $V = \mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt, so ist $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$ mit Standard-Skalarprodukt, denn jeder Vektor in $\mathbb{C}^n$ lässt sich eindeutig schreiben als $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$.

16.15 Sei $(V, \langle\,,\,\rangle)$ endl.-dim.-eukl. $\mathbb{R}$-VR und sei $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann sind äquivalent:

(1) F normal (bzw. orthogonal, bzw. selbstadj.)

(2) $F_{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})$ ist normal (bzw. unitär, bzw. selbstadjungiert).

Bew: Einsetzen und nachrechnen! ■

16.16 Bemerkung: Ist $(V, \langle , \rangle)$ ein Zl. $\mathbb{R}$-VR und ist $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine ONB von V, so ist B auch eine ONB von $V_{\mathbb{C}}$ (es gilt $V \subseteq V_{\mathbb{C}}$ via $v \mapsto v + i0$). Denn

$$\langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{C}} \overset{11.13}{=} \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

und $\dim_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Ist $F \in \mathrm{End}(V)$, so erhält man für die Darstellungsmatrix:

$$A^B_{F_{\mathbb{C}}} = A^B_F \quad , \text{ denn sind } \tilde{A} = A^B_{F_{\mathbb{C}}},\ A = A^B_F,$$

so gilt

$$\tilde{a}_{ij} = \langle F_{\mathbb{C}}(v_j + i0), v_i + i0 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle F(v_j) + i0, v_i + i0 \rangle_{\mathbb{C}}$$
$$= \langle F(v_j), v_i \rangle = a_{ij}.$$

Wir wollen aber nun umgekehrt aus einer ONB für $V_{\mathbb{C}}$ aus EV von $F_{\mathbb{C}}$ eine "schöne" ONB für V basteln! Dazu beachten wir zunächst, dass jedes reelle Polynom $\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ auch als komplexes Polynom durch Einsetzen von $\lambda \in \mathbb{C}$ betrachtet werden kann. In diesem Sinn gilt dann:

16.17 Lemma Sei $(V, \langle , \rangle)$ endl. dim. eukl. VR und sei $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt

$$P_{F_{\mathbb{C}}}(\lambda) = P_F(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

d.h. das charakt. Polynom von $F_{\mathbb{C}}$ ist gleich dem charakt. Polynom von F (fortgesetzt auf $\mathbb{C}$).

Bew: Wähle ONB $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ wie in 16.16 und

folgt dann aus 16.16, dass
$$P_{F_\mathbb{C}}(\lambda) = \det(\lambda\,\mathrm{id} - A^{\mathcal{B}}_{F_\mathbb{C}}) = \det(\lambda\,\mathrm{id} - A^{\mathcal{B}}_{F}) = P_F(\lambda)$$ ∎

Bem: Insb. folgt aus 16.17: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ k-fache Nullst. von $P_{F_\mathbb{C}} = P_F$, so ist auch $\bar\lambda$ eine k-fache Nullst. von $P_{F_\mathbb{C}}$. Damit folgt: Ist λ EW von $F_\mathbb{C}$, so auch $\bar\lambda$ (mit gleicher algebraischer Vielfachheit).

16.18 Lemma Seien $(V, \langle\,,\rangle)$ endl. dim. eukl. VR und $F \in \mathrm{End}(V)$ normal. Für $u = v + iw \in V_\mathbb{C}$, $v, w \in V$, setze $\bar u = v - iw \in V_\mathbb{C}$. Dann gelten:

(1) Ist $\lambda = a + ib$ EW von $F_\mathbb{C}$ und $u = v + iw$ EV zu λ, so gelten
$$F(v) = av - bw, \quad F(w) = bv + aw \quad \text{und} \quad F_\mathbb{C}(\bar u) = \bar\lambda \bar u.$$

(2) Ist $\{u_1, \dots, u_\ell\}$ eine ONB für $E_\lambda(F_\mathbb{C}) \subseteq V_\mathbb{C}$, so ist $\{\bar u_1, \dots, \bar u_\ell\}$ eine ONB für $E_{\bar\lambda}(F_\mathbb{C})$.

(3) Ist $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$ und $\{u_1, \dots, u_\ell\}$ eine ONB für $E_\lambda(F_\mathbb{C})$ mit $u_j = v_j + iw_j$, $v_j, w_j \in V$, $1 \le j \le \ell$, so ist
$$\{\sqrt2 v_1, \sqrt2 w_1, \sqrt2 v_2, \sqrt2 w_2, \dots, \sqrt2 v_\ell, \sqrt2 w_\ell\} \subseteq V \text{ eine ONB für}$$
$$E_\lambda(F_\mathbb{C}) \oplus E_{\bar\lambda}(F_\mathbb{C}).$$

Bew: (1) Wir rechnen: Ist $F_\mathbb{C}(v+iw) = \lambda(v+iw)$, so folgt
$$F(v) + iF(w) = F_\mathbb{C}(v+iw) = (a+ib)(v+iw) = (av - bw) + i(bv + aw)$$
Damit folgt $F(v) = av - bw$, $F(w) = bv + aw$ und
$$F_\mathbb{C}(\bar u) = F(v) - iF(w) = (av - bw) - i(bv + aw) = (a - ib)(v - iw)$$
$$= \bar\lambda \bar u.$$

(2) Es gilt: Ist $\{u_1, \dots, u_\ell\}$ ein ONS, so auch $\{\bar u_1, \dots, \bar u_\ell\}$, denn man rechnet schnell aus
$$\langle \bar u_i, \bar u_j\rangle = \overline{\langle u_i, u_j\rangle} = \bar\delta_{ij} = \delta_{ij}.$$ Rest folgt aus (1).

③ Sei $u_i = v_i + i w_i$ für $1 \le i \le l$. Da $\lambda \ne \bar\lambda$ EW von $F_{\mathbb{C}}$ und da $F_{\mathbb{C}}$ normal gilt $E_\lambda(F_{\mathbb{C}}) \perp E_{\bar\lambda}(F_{\mathbb{C}})$ (16.10).
Damit folgt für $i \ne j$:

$$\langle u_i, u_j\rangle = 0 = \langle u_i, \bar u_j\rangle$$

und dann auch: mit $v_j = \frac{1}{2}(\underbrace{u_j + \bar u_j}_{\in E_\lambda(F_{\mathbb{C}})\oplus E_{\bar\lambda}(F_{\mathbb{C}})})$, $w_j = \frac{1}{2i}(\underbrace{u_j - \bar u_j}_{\in E_\lambda(F_{\mathbb{C}})\oplus E_{\bar\lambda}(F_{\mathbb{C}})})$:

$$0 = \langle u_i, \tfrac{1}{2}(u_j + \bar u_j)\rangle = \langle u_i, v_j\rangle = \langle v_i + i w_i, v_j\rangle$$
$$= \langle v_i, v_j\rangle + i\langle w_i, v_j\rangle \quad \text{und}$$
$$0 = \langle u_i, \tfrac{1}{2i}(u_j + \bar u_j)\rangle = \langle u_i, w_j\rangle = \langle v_i, w_j\rangle + i\langle w_i, w_j\rangle.$$

Es folgt $\langle v_i, v_j\rangle = \langle w_i, w_j\rangle = \langle w_i, v_j\rangle = 0 \quad \forall i \ne j$.

Für $i \ne j$ gilt $0 = \langle u_i, \bar u_i\rangle = \langle v_i + i w_i, v_i - i w_i\rangle$

$$= \underbrace{\langle v_i, v_i\rangle}_{\|v_i\|^2} - \underbrace{\langle w_i, w_i\rangle}_{\|w_i\|^2} + i(\underbrace{\langle w_i, v_i\rangle + \langle v_i, w_i\rangle}_{2\langle v_i, w_i\rangle})$$

Daraus folgt $\|v_i\|^2 = \|w_i\|^2$ und $\langle v_i, w_i\rangle = 0 \quad \forall i$.
Schließlich gilt

$$1 = \|u_i\|^2 = \langle v_i + i w_i, v_i + i w_i\rangle = \|v_i\|^2 + \|w_i\|^2$$

und da $\|v_i\|^2 = \|w_i\|^2$ folgt $\|v_i\|^2 = \|w_i\|^2 = \frac{1}{2}$, also $\|v_i\| = \|w_i\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Damit ist

$$\{\sqrt{2}v_1, \sqrt{2}w_1, \dots, \sqrt{2}v_l, \sqrt{2}w_l\} \text{ ein ONS in } E_\lambda(F_{\mathbb{C}}) \oplus E_{\bar\lambda}(F_{\mathbb{C}})$$

und da $\dim(E_\lambda \dots) = 2l$ folgt (3) ∎

16.19 Satz (Reelle normale Endomorphismen)
Sei $(V, \langle\,,\rangle)$ ein endl. dim. eukl. VR und sei $F \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann ex. eine ONB $\{u_1, \dots, u_k, v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_m, w_m\}$ von V mit

$$A_F^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1\end{pmatrix} & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ -b_m & a_m\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Hierbei sind die $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die reellen EW von F (mit Vielfachheiten) und $\mu_j = a_j + i b_j$ sind die komplexen EW von $F_{\mathbb{C}}$.

<u>Bew:</u> Sei $F_{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})$ die Komplexifizierung von F.
Wähle zu jedem EW λ von $F_{\mathbb{C}}$ eine ONB $\{u_1, \dots, u_e\}$ von $E_\lambda(F_{\mathbb{C}})$.

<u>1) Fall</u> Ist λ reell, so können wir o.B.d.A. $u_i \in V$ annehmen, denn ist $u_i = v_i + i w_i$ EV zu λ, so ist auch $\bar{u}_i = v_i - i w_i$ ein EV zu $\lambda = \bar{\lambda}$ (16.18(1)).
Damit sind auch $v_i = \frac{1}{2}(u_i + \bar{u}_i)$, $w_i = \frac{1}{2i}(u_i - \bar{u}_i) \in E_\lambda(F_{\mathbb{C}})$ und da $u_i = v_i + i w_i \in \mathrm{Lin}\{v_i, w_i\}$ ist $\{v_1, w_1, \dots, v_e, w_e\}$ ein <u>reelles</u> Erz-System von $E_\lambda(F_{\mathbb{C}})$.
Nach Basisauswahlsatz können wir hieraus eine Basis $\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_e\}$ von $E_\lambda(F_{\mathbb{C}})$ auswählen und mit Schmidt können wir dann hieraus eine <u>reelle</u> ONB $\{u_1, \dots, u_e\}$ von $E_\lambda(F_{\mathbb{C}})$ konstruieren!
(die Konstruktion führt dann wieder zu reellen Vektoren)

<u>2) Fall</u> Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ echt komplexer EW von $F_{\mathbb{C}}$, so gilt nach 16.18(3): Ist $u_i = \tilde{v}_i + i \tilde{w}_i$, und ist $v_i = \sqrt{2}\tilde{v}_i$, $w_i = \sqrt{2}\tilde{w}_i$, so ist
$\{v_1, w_1, \dots, v_e, w_e\}$ eine ONB von $E_\lambda(F_{\mathbb{C}}) \oplus E_{\bar{\lambda}}(F_{\mathbb{C}})$
und es gilt nach 16.18(4):

$$F(v_i) = a v_i - b w_i, \quad F(w_i) = b v_i + a w_i.$$

Da $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{j=1}^{k} E_{\lambda_j}(F_{\mathbb{C}})$ die direkte Summe der Eigenräume von $F_{\mathbb{C}}$ ist (da $F_{\mathbb{C}}$ diagonalisierbar nach 16.11) folgt:
Setzen wir

$\mathcal{B} = \{u_{11}, \dots, u_{1e_1}, \dots, u_{r1}, \dots, u_{re_r}, v_{11}, w_{11}, \dots, v_{1k_1}, w_{1k_1}, \dots, v_{s1}, w_{s1}, \dots, v_{sk_s}, w_{sk_s}\}$
mit $\{u_{i1}, \dots, u_{ie_i}\}$ <u>reelle</u> ONB von $E_{\lambda_i}(F_{\mathbb{C}})$, λ_i reelle EW und $\{v_{j1}, w_{j1}, \dots, v_{jk_j}, w_{jk_j}\}$ <u>reelle</u> ONB von $E_{\lambda_j}(F_{\mathbb{C}}) \oplus E_{\bar{\lambda}_j}(F_{\mathbb{C}})$ für komplexe λ_j wie in (2), so ist
$A_F^{\mathcal{B}}$ wie im Satz.

∎

16.20 Folgerung: Sei $A \in M(n\times n, \mathbb{R})$ normal. Dann ex. eine orthogonale Matrix O mit

$$O^* A O = O^T A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ -b_m & a_m \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Bew: Wende 16.19 an auf $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $Fx = Ax$ und setze $O = (u_1, \dots, u_k, v_1, w_1, \dots, v_m, w_m)$ mit u_i, v_j, w_j wie in 16.19. ∎

16.21: Lemma Ist $(V, \langle , \rangle)$ endl. dim unitärer (bzw. orthog.) VR und ist $F \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert, so ist jeder EW von F reell.

Bew: Ist $0 \neq v$ EV zum EW λ, so folgt

$$\lambda \langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle F(v), v\rangle \underset{F = F^*}{=} \langle v, F(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle.$$

Damit folgt $(\lambda - \bar{\lambda})\langle v, v\rangle = 0$, also $\lambda = \bar{\lambda}$, da $\langle v, v\rangle \neq 0$. ∎

16.22 Folgerung Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein endl. dim. eukl. $\mathbb{R}$-VR. und sei $F \in \mathrm{End}(V)$ selbstadj. Dann ist F reell diagonalisierbar. Genauer: $\exists$ ONB $\{u_1, \dots, u_n\}$ von V mit $A_F^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Bew: Da F normal ist 16.19 anwendbar. Da alle EW von $F_{\mathbb{C}}$ reell (da $F_{\mathbb{C}} = F_{\mathbb{C}}^*$) fallen also die $\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$ Kästchen in 16.19 weg! ∎

16.23 Folgerung: Ist $A \in M(n\times n, \mathbb{R})$ symmetrisch, also $A = A^T$ $(= A^*)$. Dann ex. eine orthog. Matrix O mit

$$O^T A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bew: Wende 16.22 an auf $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = Ax$ ∎

Wir kommen nun zu unitären bzw. orthogonalen Matrizen.

<u>16.24</u> <u>Lemma</u> Sei $(V, \langle , \rangle)$ endl. dim. unitärer $\mathbb{C}$-VR und sei $F \in \operatorname{End}(V)$ unitär. Dann gilt $|\lambda| = 1$ für alle EW λ von F.

<u>Bew:</u> Ist F unitär, so folgt $\langle F(v), F(v) \rangle = \langle v, v \rangle$ für alle $v \in V$. Ist λ EW von F mit EV $v \neq 0$, so folgt:

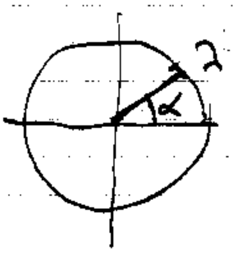
$$|\lambda|^2 \langle v, v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \langle F(v), F(v) \rangle = \langle v, v \rangle$$

Dann folgt $|\lambda|^2 = 1$ $\blacksquare$

<u>16.25</u> <u>Satz</u> Sei $(V, \langle , \rangle)$ endl. dim. eukl. $\mathbb{R}$-VR und sei $F \in \operatorname{End}(V)$ orthogonal. Dann ex. eine ONB $\mathcal{B}$ von V mit

$$A_F^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} -1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{matrix}\right\} k & & & 0 \\ & \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) & \sin(\alpha_1) \\ -\sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{pmatrix} \cos(\alpha_m) & \sin(\alpha_m) \\ -\sin(\alpha_m) & \cos(\alpha_m) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

<u>Bew:</u> Nachrechnen zeigt: Ist F orthogonal, so ist $F_{\mathbb{C}}$ unitär. Damit gilt $|\lambda| = 1$ für alle EW λ von $F_{\mathbb{C}}$. Es folgt: Ist λ reell, so ist $\lambda = \pm 1$, ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so gilt $\lambda = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ (Polarkoordinaten)



Der Rest folgt sofort aus Satz 16.19. $\blacksquare$

<u>16.26</u> <u>Folgerung</u> Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ orthogonal, so ex. eine orthogonale Matrix O mit $O^T A O$ wie in 16.25.

16.27 Anwendung für $n=3$:

Ist $A \in M(3\times 3, \mathbb{R})$ orthogonal, so ex. eine ONB $\mathcal{B}=\{u,v,w\}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass die orthog. Abb.

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ x \mapsto Ax$

bzgl. $\mathcal{B}$ eine Darstellungsmatrix der Form

$$A_F^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha \in [0, 2\pi)$$

besitzt (ist $\alpha=0$, so ist $A_F^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha=\pi$, so $A_F^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$. Wir erhalten so also alle Fälle aus Satz 16.25).

Setzen wir dann $O=(u,v,w)$, so gilt

$$O^T A O = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Im Fall $+1$ ist F eine Drehung mit dem Winkel α um die durch u aufgespannte Achse.

Im Fall -1 ist Drehung mit Winkel α um u-Achse gefolgt von einer Spiegelung an der v,w-Ebene?