§8 Der Entzerrungsalgorithmus und der Rang einer Matrix

8.1 Wir wollen nun die bisherigen Erkenntnisse nutzen, um eine schöne Lösungsformel für die Lösungen von linearen Gleichungssystemen anzugeben:

Sei dazu $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$.
Betr. die Gleichung $Ax = b$, $x \in \mathbb{K}^n$ gesuchte Lösung.

Wir wissen (Satz 3.3), dass wir die Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$ beschreiben können durch

$$L = x_s + \mathrm{Kern}(A) \quad (= \{x_s + y \mid y \in \mathrm{Kern}(A)\})$$

wobei x_s eine beliebige (fest gewählte) Lösung für $Ax = b$ ist. Ist dann $\{y_1, \dots, y_e\}$ eine Basis für $\mathrm{Kern}(A)$, so folgt

$$L = \{x_s + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_e y_e \mid \lambda_1, \dots, \lambda_e \in \mathbb{K}\}$$

wobei eine geg. Lösung eindeutig durch die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_e \in \mathbb{K}$ festgelegt ist (bei geg. Wahl von x_s und der Basis $\{y_1, \dots, y_e\}$ von $\mathrm{Kern}(A)$).

Für eine vollständige Berechnung der Lösungsmenge L müssen wir also zwei Schritte absolvieren:

(1) Berechnen einer speziellen Lösung x_s für $Ax = b$.
(2) Berechnung einer <u>Basis</u> für $\mathrm{Kern}(A) \subseteq \mathbb{K}^n$.

Wie bereits in §1 erklärt bilden wir hierzu die erweiterte Matrix $(A \mid b)$. Wir transformieren (A, b) durch element. Zeilenumformungen in ein System

$$(\tilde{A}, \tilde{b})$$

mit $\tilde{A}$ Zeilenstufenform von A, also

$$(\tilde{A}, \tilde{b}) = \left(\begin{array}{cccccccccc|c}
 & & j_1 & & j_2 & & j_3 & \cdots & j_k & & \\
0 \cdots 0 & & 1 & * * & 0 & * * & 0 & & 0 & & \tilde{b}_1 \\
0 & & 0 \cdots 0 & & 1 & * * & 0 & & & & \vdots \\
 & & & & 0 & & 1 & & & & \\
 & & & & & & 0 & \ddots & & & \\
 & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & 1 & * * & \tilde{b}_k \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & \tilde{b}_{k+1} \\
 & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & & 0 \; 0 & \cdots & & & & & 0 & 0 & \tilde{b}_m
\end{array}\right) \qquad (*)$$

Wir wissen aus §1: Es gilt $Ax = b \iff \tilde{A}x = \tilde{b}$.
Wir sehen sofort: Es gilt $\text{Bild}(\tilde{A}) = LH\{\tilde{a}_{j_1}, \dots, \tilde{a}_{j_k}\}$ $= LH\{e_1, \dots, e_k\} \subseteq \mathbb{K}^m$. Salopp gesprochen erhalten wir $\text{Bild}(\tilde{A}) = \mathbb{K}^k \subseteq \mathbb{K}^m$ (wobei wir $\mathbb{K}^k$ mit dem Erzeugnis von $\{e_1, \dots, e_k\}$ in $\mathbb{K}^m$ identifizieren).

Es folgt sofort:

(1) Ist einer der Einträge $\tilde{b}_{k+1}, \dots, \tilde{b}_m$ ungleich 0, so besitzt die Gleichung $Ax = b$ **keine** Lösung!

(2) Es gilt $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Bild}(\tilde{A})) = k$

Aus (2) folgt mit der Dimensionsformel 7.17, angewandt auf $F_{\tilde{A}}: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ x \mapsto \tilde{A}x$, dass

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Kern}(\tilde{A})) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Bild}(\tilde{A})) = n - k.$$

Da aber $Ax = 0 \iff \tilde{A}x = 0$, folgt hieraus sofort

(3) $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Kern}(A)) = n - k$.

Um eine Basis von Kern(A) zu bestimmen, müssen wir also nur $n-k$ linear unabhängige Elemente
$y_1, \dots, y_{n-k} \in \text{Kern}(A) = \text{Kern}(\tilde{A})$
finden. Dazu verfahren wir wie folgt:

(wir nehmen jetzt an, dass $\tilde b_{k+1}, \dots, \tilde b_m = 0$). (56)

Durch Streichen der letzten Nullzeilen und durch Hinzufügen von neuen Nullzeilen (unten in rot eingezeichnet) verwandeln wir $\tilde A$ in eine $n \times n$-Matrix, so dass alle "Einsen" auf der Diagonale landen:

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad j_1 \qquad j_2 \qquad j_3 \ \cdots \ j_k \qquad \tilde{\tilde b} \\
\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & & & & & & & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & & & & & & & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * & \cdots & \tilde b_1 \\
0 & \cdots & & 0 & & & & & & 0 & 0 \\
0 & \cdots & & & 0 & & & & & 0 & 0 \\
0 & \cdots & & & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & \tilde b_2 \\
0 & \cdots & & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & 0 & & 0 & 0 \\
0 & \cdots & & & & & 0 & 1 & * & 0 & \tilde b_3 \\
0 & \cdots & & & & & & 0 & & 0 & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & 0 & 1 & \tilde b_k \\
0 & \cdots & & & & & & & & 0 & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & & 0 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow j_1 \\ \\ \\ \leftarrow j_2 \\ \\ \\ \leftarrow j_3 \\ \\ \\ \leftarrow j_k \\ \\ \\
\end{array}
= (\tilde{\tilde A}, \tilde{\tilde b})
\end{array}
$$

Durch Einsetzen stellen wir fest, dass $\tilde{\tilde A}\tilde{\tilde b} = \tilde{\tilde b}$

Da $(\tilde{\tilde A}, \tilde{\tilde b})$ aus $(\tilde A, \tilde b)$ nur durch Streichen und Hinzufügen von Nullzeilen hervorgeht, gilt

$$\left.\tilde{\tilde A}x = \tilde{\tilde b} \iff \tilde A x = \tilde b \ (\iff Ax = b)\right\}$$ Damit: $x_s := \tilde{\tilde b}$ ist spezielle Lösung!

Wir ersetzen nun alle roten Nullen auf der Diagonale durch -1! Wir erhalten:

$$
\tilde{\tilde A} =
\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
-1 & 0 & & & & & & & & 0 & \cancel{0} \\
0 & -1 & 0 & & & & & & & 0 & \cancel{0} \\
 & & 1 & * & * & 0 & * & * & 0 & * & \cancel{\tilde b_1} \\
0 & & 0 & -1 & 0 & & & & & 0 & \cancel{0} \\
0 & & & 0 & -1 & 0 & & & & 0 & \cancel{0} \\
0 & & & & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & \cancel{\tilde b_2} \\
0 & & & & & 0 & -1 & 0 & & 0 & \cancel{0} \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & & \\
0 & & & & & & 0 & -1 & 0 & 0 & \cancel{0} \\
0 & & & & & & & 0 & 1 & * & \cancel{\tilde b_3} \\
0 & & & & & & & & 0 & -1\ 0 & \cancel{0} \\
\vdots & & & & & & & & & \ddots & \vdots \\
0 & & & & & & & & 0 & 1\ * & \cancel{\tilde b_k} \\
0 & & & & & & & & & 0\ -1\ 0 & \cancel{0} \\
0 & & & & & & & & & 0\ -1 & \cancel{0}
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ j_1 \\ \\ \\ j_2 \\ \\ \\ \\ j_3 \\ \\ \vdots \\ j_k \\ \\ \\
\end{array}
$$

Durch Einsetzen stellen wir fest:
Die $n-k$ Spalten mit den -1en auf den Diagonaleinträgen sind Lösungen für $\tilde{\tilde A}x = 0$ (also auch für $Ax = 0$). Diese sind ferner linear unabhängig!

<u>Fazit</u>: Die n-k Spalten von $\tilde{\tilde{A}}$ mit -1 auf dem Diagonaleintrag der Spalte bilden eine <u>Basis</u> für Kern (A)!

<u>8.2 Bsp</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$

Wir wollen die vollst. Lösungen für $Ax = b_1$, $Ax = b_2$ angeben. Dazu

$$(A \mid b_1, b_2) = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) = (\tilde{A} \mid \tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$$

Wir sehen, dass die Gleichung $Ax = b_1$ <u>keine</u> Lösung besitzt. Für $b = b_2$ erhalten wir durch Streichen und Ergänzen von Nullzeilen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten: $x_s = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine spezielle Lösung für $Ax = b$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis für Kern(A). Wir erhalten also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

ist vollst. Lösung der Gleichung $Ax = b_2$

Wir kommen nun zum Begriff des <u>Rangs</u> einer Matrix. Wir definieren:

<u>8.3</u> <u>Def</u>: Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$. Dann setzen wir

$$\operatorname{Rang}(A) := \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Bild}(A))$$

$\operatorname{Rang}(A)$ heißt der <u>Rang</u> der Matrix A.
(Erinnerung: $\operatorname{Bild}(A) = LH\{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n\}$ wenn $A = (\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n)$)

<u>8.4</u> <u>Satz</u> Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ und seien $D \in GL(m, \mathbb{K})$, $F \in GL(n, \mathbb{K})$ invertierbare Matrizen. Dann gilt

$$\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(AF) = \operatorname{Rang}(DA) = \operatorname{Rang}(DAF).$$

<u>Bew</u>: Zunächst gilt

$$\operatorname{Bild}(AF) = \{(AF)x \mid x \in \mathbb{K}^n\} = \{A(Fx) \mid x \in \mathbb{K}^n\} = \{Ay \mid y \in \mathbb{K}^n\}$$
$$= \operatorname{Bild}(A), \text{ da } \{Fx \mid x \in \mathbb{K}^n\} = \mathbb{K}^n$$

Es folgt $\operatorname{Bild}(AF) = \operatorname{Bild}(A)$, also auch $\operatorname{Rang}(AF) = \operatorname{Rang}(A)$.
Ist nun $\{y_1, \dots, y_r\}$ Basis von $\operatorname{Bild}(A)$, so gilt $\operatorname{Bild}(DA) = D(\operatorname{Bild}(A)) = LH\{Dy_1, \dots, Dy_r\}$, und da $y \mapsto Dy$ bijektiv und linear, sind $Dy_1, \dots, Dy_r$ linear unabhängig. Es folgt $\operatorname{Rang}(DA) = \operatorname{Rang}(A)$.
Ersetzen wir jetzt A durch AF, so folgt auch $\operatorname{Rang}(DAF) = \operatorname{Rang}(AF)$ $(= \operatorname{Rang}(A))$. ■

Aus Satz 8.4 folgt nun leicht:

<u>8.5</u> <u>Folgerung</u>: Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$. Dann ist $\operatorname{Rang}(A)$ invariant unter elementaren Zeilen- und elementaren Spaltenumformungen.

<u>Bew</u>: Beide Arten von Umformungen entstehen durch Mult (von links oder rechts) mit Elementarmatrizen, also mit invertierbaren Matrizen! ■

<u>8.6</u> Bemerkung: Aus §4 wissen wir, dass wir jede Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ durch elementare Zeilen und Spaltenumf. auf eine Form

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\Big\}k$$

bringen können.

Wir sehen dann sofort: $\mathrm{Rang}(A) = k$.

<u>8.7</u> Folgerung: Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$. Dann gilt

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^T).$$

<u>Bew.</u>: Nach 4.5 ex. invertierbare Matrizen D und F mit

$$DAF = \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\begin{matrix}\}k \\ \}m-k\end{matrix}, \text{ also } \mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(DAF) = k.$$

Dann gilt also $\left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\begin{matrix}\}k \\ \}n-k\end{matrix} = (DAF)^T = F^T A^T D^T$ und F^T, D^T invertierbar. Also folgt auch

$$\mathrm{Rang}(A^T) = \mathrm{Rang}(F^T A^T D^T) = k. \qquad \blacksquare$$

<u>8.8</u> Bemerkung: Die Spalten der Matrix A^T sind die Zeilen von A. Per Def gilt dann:

$\mathrm{Rang}(A)$ = Dimension des "Spaltenraums" von A d.h. dem von den Spalten von A erz. UVR von $\mathbb{K}^m$. (= Spaltenrang von A)

$\mathrm{Rang}(A^T)$ = Dimension des "Zeilenraums" von A, d.h. dem von den <u>Zeilen</u> von A erzeugten UVR von $\mathbb{K}^n$ (= Zeilenrang von A).

Aus 8.7 folgt also: Ist $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$, so hat der von den Spalten von A erz. UVR von $\mathbb{K}^m$ dieselbe Dimension wie der von den Zeilen von A aufgespannte UVR von $\mathbb{K}^n$!

Eine interessante Anwendung des Rangs ist der folgende Satz:

<u>8.9 Satz</u> Sei $A \in M(m\times n, \mathbb{K})$ und sei $b \in \mathbb{K}^m$. Sei (A,b) die um die b-Zeile erweiterte Matrix. Dann gelten:

(1) Die Gleichung $Ax = b$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}((A,b))$.

(2) Gilt $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}((A,b))$, so besitzt die Gleichung $Ax = b$ genau dann eine <u>eindeutige</u> Lösung, wenn $\mathrm{Rang}(A) = n$

<u>Bew:</u> (1) folgt aus der Zeilenstufenform für (A,b):

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & \tilde{b}_1 \\ 0 & & 0 & & & 1 & * & 0 & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \tilde{b}_r \\ \hline 0 & & 0 & & & & & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ 0 & \cdots & & & & 0 & & 0 & \tilde{b}_m \end{array}\right) = (\tilde{A}, \tilde{b}).$$

Dann gilt $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(\tilde{A})$ und $\mathrm{Rang}((A,b)) = \mathrm{Rang}((\tilde{A},\tilde{b}))$. Die Gleichung $Ax=b$ besitzt nach 8.1 genau eine Lösung wenn $\tilde{b}_{r+1}, \dots, \tilde{b}_m = 0$ und das ist genau dann der Fall wenn $\mathrm{Rang}(\tilde{A}) = \mathrm{Rang}((\tilde{A},\tilde{b}))$.

(2) ~~Da $A \in M(m\times n, \mathbb{K})$ [illegible]~~

Die Gleichung $Ax = b$ ist eindeutig lösbar g.d.w. $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$. Das gilt genau dann wenn die Spalten von A linear unabhängig sind.

$(x \in \mathrm{Kern}(A) \iff x_1\tilde{a}_1 + \dots + x_n\tilde{a}_n = 0$, wenn $A = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n))$

Das ist äquivalent zu $\mathrm{Rang}(A) = n$. ∎