Lösungen zu Übungen zur Mathematik für Physiker III, Blatt 9:

Aufgabe 29: Nach Vorlesung Bsp. 10.12 gilt $V_2(\text{Einheitskreis}) = \pi$

$$\Rightarrow V_2(K) = \frac{\pi}{4} \text{ für den Viertelkreis } K.$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{4}{\pi} \cdot \int_K x_1 \, dx$$

kleiner Fubini

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} x_1 \, dx_2 \right) dx_1$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^1 x_1 \cdot \left[x_2 \right]_0^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^1 x_1 \cdot \sqrt{1-x_1^2} \, dx_1$$

$$= \left[\frac{4}{\pi} \cdot (1-x_1^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3\cdot\pi} \cdot \left[-0 - (-1) \right] = \frac{4}{3\cdot\pi}.$$

Aus Symmetriegründen ist auch $S_2 = \frac{4}{3\cdot\pi}$.

$$\Rightarrow \text{Schwerpunkt } S = \left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi} \right)^t.$$

Aufg. 30: Beachte: richtig heißt es: $-\infty < a < b$.

(1) kleine Fubini $\Longrightarrow$

$$V := V_2(K) = \int_a^b \left(\int_{\{0 \le x_1^2 + x_2^2 \le r(x_3)^2\}} dx_1\, dx_2 \right) dx_3$$

Da die Fläche der Kreisscheibe vom Radius $r(x_3)$ durch $\pi \cdot r(x_3)^2$ gegeben ist (Bsp. 10.12)

$$\Longrightarrow V = \int_a^b \pi \cdot r(x_3)^2\, dx_3 = \pi \cdot \int_a^b r(x)^2\, dx .$$

---

(2) Kugel = Rotationskörper K mit

$r: [-1, 1] \to [0, \infty[\,;\ r(x) = \sqrt{1-x^2}$.

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} V_3(\text{Einheitskugel})$$

$$= \pi \cdot \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \left[\pi\left(x - \tfrac{1}{3}x^3\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[2\pi\left(x - \tfrac{1}{3}x^3\right)\right]_0^1 = 2\pi \cdot \left(1 - \tfrac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} .$$

Aufg. 30 (3): Nach Definition von S_1 gilt:

$$2\pi \cdot S_1 \cdot V_2(F) = 2\pi V_2(F) \cdot \frac{1}{V_2(F)} \int_F x_1 \, dx$$

~~K~~ kleiner Fubini $= 2\pi \cdot \int_a^b \left(\int_0^{r(x_3)} x_1 \, dx_1 \right) dx_3$

$$= 2\pi \int_a^b \left[\tfrac{1}{2} x^2 \right]_0^{r(x_3)} dx_3$$

$$= 2\pi \cdot \int_a^b \tfrac{1}{2} r(x_3)^2 \, dx_3$$

$$= \pi \cdot \int_a^b r(x_3)^2 \, dx_3 \overset{(1)}{=} V_3(K).$$

Aufg. 31: Bem.: f stetig $\Rightarrow \tilde{f}$ stetig auf der kompakten Menge $W_{a,b} \Longrightarrow$ integrierbar nach Satz 10.8 (1) der Vorlesung.

Sei zunächst $f := 1_{[c,d]}$ mit $0 \leq c < d < \infty$.

$\Longrightarrow \tilde{f} = 1_{W_{c,d}}$. Außerdem sind nach Definition die Seiten des Würfels Nullmengen $\Longrightarrow$

$$\int 1_{W_{c,d}}\, dx = V_n(W_{d,0}) - V_n(W_{c,0})$$

$$= d^n - c^n,$$ da $W_{d,0}$ bzw. $W_{c,0}$ ein Würfel mit n Kantenlängen d bzw. c ist. Ebenso ist aber

$$n \cdot \int_{[c,d]} r^{n-1}\, dr = \left[r^n \right]_c^d = d^n - c^n .$$

$\Rightarrow$ Bel. ist gültig für $f = 1_{[c,d)}$.

Aus Linearität $\Rightarrow$ Bel. ist gültig für alle Treppenfunktionen auf $[a,b]$.

Sei nun f stetig mit $f \leq 0$. $\Rightarrow$ Nach Lem. 10.7 kann man eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen φ_k finden, mit $\varphi_k(x) \nearrow f(x)$ für alle $x \in [a,b]$. $\Longrightarrow$ $\tilde{\varphi}_k$ ist monoton steigende Folge von Treppenfunktionen mit $\tilde{\varphi}_k \nearrow \tilde{f}$.

Da Formel für φ_k gültig $\Longrightarrow$

$$\int \tilde{\varphi}_k\, dx = n \cdot \int_{[a,b]} \varphi_k(r) \cdot r^{n-1}\, dr$$

Monotonie $\leq n \cdot \int_{[a,b]} f(r) \cdot r^{n-1}\, dr = \text{konstant}.$

Nach dem Kleinen Satz von Beppo Levi (Satz 10.1) folgt somit:

$$\int \tilde{f}\,dx = \lim_{k\to\infty} \int \tilde{\varphi}_k\,dx$$
$$= \lim_{k\to\infty} n \cdot \int_{[a,b]} \varphi_k(r)\, r^{n-1}\,dr$$

$$= n \cdot \int_{[a,b]} f(r)\, r^{n-1}\,dr.$$

Ist schließlich f nur stetig, so wende man dieses Argument auf $f_+ := \max\{f, 0\}$ bzw. $f_- := \min\{f, 0\}$ an!

(Oder auf $f - c \cdot 1_{[a,b]}$ mit $f \leq c = \text{konst}$, da das stetige f auf dem kompakten Intervall beschränkt ist. Beachte: Formel ist schon bekannt für die Treppenfunktion $c \cdot 1_{[a,b]}$.)