Matematik für Physiker III WS 2007/08

Inhalte: Differential und Integralrechnung in mehreren Variablen

§1 Metrische Räume

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst Konvergenz von Folgen und Stetigkeit von Abbildungen in einem allgemeinen Rahmen betrachten. Die wichtigste Struktur, die wir hierzu benötigen, ist ein vernünftiger Abstandsbegriff für je zwei Elemente in einer geg. Menge.

1.1 Def: Sei $\emptyset \neq X$ eine Menge. Eine Metrik d auf X ist eine Abb.

$$d : X \times X \to [0,\infty)$$

mit den Eigenschaften

1) $d(x,y) = 0$ g.d.w. $x = y$.
2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$ (Symmetrie)
3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$ (Δ-Ungl.)

Ist d eine Metrik auf X, so heißt (X,d) ein metr. Raum.

1.2 Bsp: (1) $d(x,y) = |x-y|$ ist Metrik auf $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$)

(2) Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-VR mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ od $\mathbb{C}$, so wird durch $d(v,w) := \|v-w\|$ eine Metrik auf V definiert

Δ-Ungl: Seien $u,v,w \in V$. Dann gilt

$$d(u,w) = \|u-w\| = \|u-v+v-w\| \underset{\Delta\text{-Ungl. für } \|\,\|}{\leq} \|u-v\| + \|v-w\| = d(u,v) + d(v,w)$$

Insb. wird durch $d(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ definiert (euklidische Metrik). Diese gibt den "anschaulichen" Abstandsbegriff auf $\mathbb{R}^n$.

(3) Ist (X,d) metr. Raum und ist $\emptyset \neq Y \subseteq X$, so wird durch

$$d_Y : Y \times Y \to [0,\infty),\ d_Y(x,y) = d(x,y) \quad \forall x,y \in Y$$

eine Metrik auf Y erklärt. d_Y heißt die Einschränkung von d auf Y. (Abstand vererbt sich auf Teilmengen)

(4) Ist $\emptyset \neq X$ bel. Menge, so wird durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf X definiert. Diese heißt die diskrete Metrik auf X.

1.3 Definition Sei (X,d) ein metrischer Raum. Ist dann $(x_n)_n$ eine Folge in X, so sagen wir $(x_n)_n$ konvergiert gegen $x \in X$, falls $d(x_n, x) \to 0$ in $\mathbb{R}$. (Rückseite!)

Bez: $x_n \to x$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n \to x$ für $n \to \infty$.

Die Folge $(x_n)_n$ heißt konvergent, falls ein $x \in X$ ex. mit $x_n \to x$. Sonst heißt $(x_n)_n$ divergent.

1.4 Bsp: (1) Ist $X = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) mit $d(x,y) = |x-y|$, so erhalten wir $x_n \to x$ gdw. $|x_n - x| \to 0$.
Das ist natürlich der übliche Grenzwertbegriff.

(2) Ist $(V, \|\cdot\|)$ normierter VR und $d(v,w) = \|v-w\|$, so gilt $v_n \to v$ in $V \Leftrightarrow \|v_n - v\| \to 0$.

Übungsaufg. Beschr. Konvergenz bzgl. der diskreten Metrik?

1.5 Beobachtung Ist $(x_n)_n$ konvergente Folge im metr. Raum (X,d), so ist der Grenzwert x eindeutig.
Denn: Seien $x,y \in X$ mit $x_n \to x$ und $x_n \to y$, so folgt $0 \leq d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y) \to 0$, also $d(x,y)=0$!

Mit Hilfe des Konvergenzbegriffs können wir dann auch Stetigkeit von Abb. definieren:

1.6 Definition Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metr. Räume. und sei $x_0 \in X$. Ferner sei $f: X \to Y$ eine Abbildung.
1) f heißt stetig in x_0, falls gilt:
$$x_n \to x_0 \text{ in } X \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \text{ in } Y$$
(bzw: $d_X(x_n,x_0) \to 0 \Rightarrow d_Y(f(x_n),f(x_0)) \to 0$).
2) f heißt stetig, falls f in allen Punkten $x_0 \in X$ stetig ist.

1.7 Bsp (1) Sei $\mathbb{R}$ versehen mit $d(x,y) = |x-y|$. Ist dann (X,d) ein metr. Raum und ist $a \in X$ fest, so ist
$$f: X \to \mathbb{R};\ f(x) = d(x,a) \quad \text{stetig}.$$
Denn: Für alle $x,y \in X$ gilt
$$|d(x,a) - d(y,a)| \leq d(x,y), \text{ denn}$$
$0 \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) \Rightarrow d(x,a) - d(y,a) \leq d(x,y)$
und Vert. von x und y liefert $d(y,a) - d(x,a) \leq d(x,y)$.
Gilt dann $x_n \to x$ in X, so folgt
$$0 \leq |f(x_n) - f(x)| = |d(x_n,a) - d(x,a)| \leq d(x_n,x) \to 0$$

(2) Insb. folgt aus (1): Ist $(V,\|\cdot\|)$ normierter VR
ist $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R};\ v \mapsto \|v\|$ stetig bzgl. der Metrik $d(v,w) = \|v-w\|$, denn $\|v\| = d(v,0)$!

1.8 Definition Sei (X,d) ein metr. Raum.

(1) Ist $\varepsilon>0$ und $x\in X$, so heißt
$$\mathcal{U}^d_\varepsilon(x) := \{y\in X \mid d(x,y)<\varepsilon\}$$
die (bzgl. d) <u>offene</u> <u>ε-Umgebung</u> um x, und
$$B^d_\varepsilon(x) := \{y\in X \mid d(x,y)\le\varepsilon\}$$
heißt die <u>abgeschlossene</u> <u>ε-Umgebung</u> um x.

(2) Eine Teilmenge $\mathcal{U}\subseteq X$ heißt <u>offen</u>, falls zu jedem $x\in\mathcal{U}$ ein $\varepsilon>0$ ex. mit $\mathcal{U}_\varepsilon(x)\subseteq\mathcal{U}$.

(3) Eine Teilmenge $A\subseteq X$ heißt <u>abgeschlossen</u>, falls $\mathcal{U}=X\setminus A$ offen ist.

<u>Skizze</u>

Bsp: (1) Ist $X=\mathbb{R}$ mit $d(x,y)=|x-y|$, so ist $\mathcal{U}_\varepsilon(x)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ die offene ε-Umgeb. und $B_\varepsilon(x)=[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$ die abg. ε-Umgebung von x.

Jedes offene Intervall $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}$, aber auch eine beliebige Vereinigung von offenen Intervallen ist offen in $\mathbb{R}$. z.B. ist $(0,1)\cup(2,\infty)$ offen in $\mathbb{R}$.

Jedes abg. Intervall $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ ist abgeschlossen, denn $\mathbb{R}\setminus[a,b]=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$ ist offen.

<u>Achtung</u>: Beliebige Vereinigungen von abg. Intervallen müssen <u>nicht</u> abg. sein!

<u>Bsp</u>: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{n},1]=(0,1]$ ist <u>nicht</u> abgeschlossen (aber auch nicht offen!).

Im allgemeinen gibt es viele Teilmengen eines metr. Raums die weder abg. noch offen sind!

② Ist (X,d) metr. Raum, so ist $U_r^d(x_0)$ offen für alle $x_0 \in X$, $r>0$, denn ist $x \in U_r^d(x_0)$, so setze $\varepsilon = r - d(x,x_0) > 0$. Dann folgt $U_\varepsilon(x) \subseteq U_r(x_0)$, denn für $y \in U_\varepsilon(x)$ gilt:

$d(y,x_0) \leq d(y,x) + d(x,x_0) < \varepsilon + d(x,x_0) = r$.

Übung: Zeige $B_r^d(x_0)$ ist abg. $\forall\, r \geq 0$, $x_0 \in X$.

1.9 Satz Sei (X,d) metr. Raum. Dann gelten:

1) Beliebige Vereinigungen offener Mengen in X sind offen in X (also: Ist $I \neq \emptyset$ Indexmenge und $U_i \subseteq X$ offen $\forall i \in I$, so ist auch $\bigcup_{i\in I} U_i$ offen).

2) Endl. Durchschnitte offener Mengen sind offen (also $U_1,\dots,U_n$ offen $\Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n$ offen).

3) $\emptyset$ und X sind offen.

Bew: (1) Sei $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ mit U_i offen. Ist dann $x \in U$, so ex. ein $i_0 \in I$ mit $x \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} offen ex. $\varepsilon > 0$ mit
$U_\varepsilon(x) \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i = U$.

(2) $x \in U_1 \cap \dots \cap U_n$. Dann: Zu jedem $j \in \{1,\dots,n\}$ ex. $\varepsilon_j > 0$ mit $U_{\varepsilon_j}(x) \subseteq U_j$. Setze $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\} > 0$.

Dann: $U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap_{j=1}^n U_{\varepsilon_j}(x) \subseteq \bigcap_{j=1}^n U_j$.

(3) Klar! ∎

Analog gilt:

1.10 Satz Sei (X,d) metr. Raum. Dann gelten:

(1) Ist $A_i \subseteq X$ abg. $\forall i \in I$, so ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ abg.

(2) Sind $A_1,\dots,A_n \subseteq X$ abg., so auch $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

(3) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.

Bew: Folgt aus 1.9 durch Übergang auf Komplemente. ∎

1.11 Definition Sei (X,d) metr. Raum und sei $A \subseteq X$.
Dann heißt $\bar{A} := \bigcap \{B \subseteq X \mid A \subseteq B, B \text{ abg.}\}$
der Abschluss von A in X.
$\bar{A}$ ist die kleinste abg. Menge in X die A enthält!

1.12 Satz Sei (X,d) metr. Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$.
Dann gilt: $x \in \bar{A} \iff \exists$ Folge $(x_n)_n$ in A mit $x_n \to x$.
Bew: „$\Rightarrow$" Sei $x \in \bar{A}$. Ist $x \in A$ so wähle $x_n = x$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Ist $x \notin A$, so folgt $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$, denn sonst
wäre $A \subseteq X \setminus \mathcal{U}_\varepsilon(x)$ und dann auch $x \in \bar{A} \subseteq X \setminus \mathcal{U}_\varepsilon(x)$.
Das ist unmöglich.
Damit ex. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$, und
dann folgt $x_n \to x$, da $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$.
„$\Leftarrow$" Sei $(x_n)_n$ Folge in A mit $x_n \to x$ für ein $x \in X$.
Ann: $x \notin \bar{A}$. Da $\bar{A}$ abg. ist $X \setminus \bar{A}$ offen und es ex. $\varepsilon > 0$
mit $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap \bar{A} = \emptyset$. Da $x_n \to x$ ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \varepsilon$
$\forall n \geq N$, also $x_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap \bar{A}$ $\forall n \geq N$. Widerspruch! ∎

Insbesondere folgt aus dem Satz:

1.13 Folgerung: Sei (X,d) metr. Raum und $A \subseteq X$.
Dann sind äquivalent:
(1) A ist abgeschlossen,
(2) A ist folgenabgeschlossen, d.h. ist $(x_n)_n$ bel. Folge in A mit $x_n \to x$ für ein $x \in X$, so folgt $x \in A$.
Bew: Nutze 1.12 und die Tatsache, dass A abg. g.d.w. $A = \bar{A}$. ∎

Wir wollen jetzt sehen, wie Offenheit/Abgeschlossenheit von Mengen mit stetigen Abb. zusammenhängt.

1.14 Satz Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metr. Räume und sei $f: X \to Y$ eine Abb. Dann sind äquivalent:

(1) f ist stetig in $x_0 \in X$.

(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ mit
$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x \in X.$$

(3) Zu jedem $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ mit $f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$.

Bew: Der Beweis geht exakt genauso, wie der Bew. der entspr. Aussage in MfP1:

$(1) \Rightarrow (2)$: Sei f stetig in x_0. Ann. $\exists\, \varepsilon > 0$ mit: $\forall \delta > 0$ ex. $x_\delta \in X$ mit $d(x_\delta, x_0) < \delta$, aber $d(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Dann ex. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein x_n mit $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$, also $x_n \to x_0$, aber $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Widerspruch zu $f(x_n) \to f(x_0)$.

$(2) \Rightarrow (1)$ Sei $(x_n)_n$ Folge in X mit $x_n \to x_0$ und sei $\varepsilon > 0$. Sei $\delta > 0$ wie in (2), also $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Da $x_n \to x_0$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_0) < \delta$ $\forall n \geq N$ und dann folgt $d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ $\forall n \geq N$, dh $f(x_n) \to f(x_0)$.

Damit folgt $(1) \Leftrightarrow (2)$ und $(2) \Leftrightarrow (3)$ ist trivial. ∎

1.15 Satz Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metr. Räume und sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(1) f ist stetig.

(2) Für jede offene Menge $\mathcal{U} \subseteq Y$ gilt $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{x \in X \mid f(x) \in \mathcal{U}\}$ ist offen in X.

(3) Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq Y$ gilt $f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in X.

Bew: $(1) \Rightarrow (2)$ Sei $x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})$. Zeige: $\exists\, \delta > 0$ mit $\mathcal{U}_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(\mathcal{U})$.
Da $f(x_0) \in \mathcal{U}$ und $\mathcal{U}$ offen ex. ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq \mathcal{U}$.
Da f stetig ex. nach 1.14 ein $\delta > 0$ mit $f(\mathcal{U}_\delta(x_0)) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq \mathcal{U}$

Damit folgt aber $U_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(U)$.

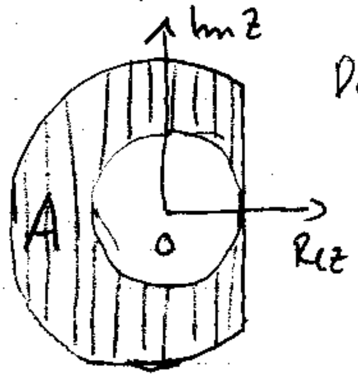
(2) $\Rightarrow$ (1) Sei $x_0 \in X$ beliebig und sei $\varepsilon > 0$. Nach (2) ist dann $V := f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$ offen in X. Da $x_0 \in V$ ex. $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subseteq V = f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$, d.h. $f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$. Nach 1.14. folgt f stetig in x_0. ∎

1.16 Bsp: Der Satz liefert oft ein sehr nützliches Kriterium um Offenheit bzw. Abgeschlossenheit von Mengen zu überprüfen

Bsp: Betr. $\mathbb{C}$ mit $d(z,w) = |z-w|$. Sei

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 1,\ 1 \leq |z| \leq 2 \}$$

Skizze:



Dann ist A abg., denn $A = A_1 \cap A_2$ mit

$$A_1 = f_1^{-1}([1,2])$$
$$A_2 = f_2^{-1}((-\infty,1])$$

mit $f_1(z) = |z|$, $f_2(z) = \operatorname{Re} z$ stetig. Da $[1,2]$ und $(-\infty,1]$ abg in $\mathbb{R}$ sind $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{C}$ abg. und damit auch $A = A_1 \cap A_2$.

In der Analysis einer Variablen spielen kompakte Intervalle eine ganz wichtige Rolle. Wir wollen jetzt einen allgemeineren Kompaktheits-Begriff einführen.

Erinnerung (Bolzano-Weierstraß)

Ist $[a,b]$ kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$, so besitzt jede Folge $(x_n)_n$ in $[a,b]$ eine in $[a,b]$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Umgekehrt ist jedes Intervall mit dieser Eigenschaft kompakt (später)

<u>1.17 Definition</u> Sei (X,d) ein metr. Raum. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt (Folgen-) kompakt, falls zu jeder Folge $(x_n)_n$ in K eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ und ein $x \in K$ ex. mit $x_{n_k} \to x$ für $k \to \infty$.
(dh. Jede Folge in K besitzt eine <u>in K</u> konv. Teilfolge).

<u>1.18 Lemma</u> Sei (X,d) metr. Raum. Ist dann $K \subseteq X$ kompakt, so ist K beschränkt und abg. in X.
(K beschränkt $\iff \exists\, C \geq 0$ und $x_0 \in X$ mit $K \subseteq B_C(x_0)$).

<u>Bew</u>: <u>Ann</u>: K ist nicht beschränkt. Dann ex. zu jedem $x_0 \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $d(x_0, x_n) \geq n$.
Da K kompakt ex. Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ und $x \in K$ mit $x_{n_k} \to x$, und dann ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{n_k}, x) < 1$ $\forall k \geq N$. Sei o.B.d.A. $N \geq d(x_0, x) + 1$. Dann folgt für alle $k \geq N$:

$$N \leq k \leq n_k \leq d(x_{n_k}, x_0) \leq d(x_{n_k}, x) + d(x, x_0)$$
$$< 1 + d(x, x_0) \leq N$$

Wir erhalten also $N < N$, was nicht geht!

<u>K ist abg</u>: Sei $(x_n)_n$ Folge in K mit $x_n \to x$ für ein $x \in X$. Zeige $x \in K$.
<u>Dazu</u>: K kpkt $\Rightarrow \exists$ Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to y$ für ein $y \in K$. Da $x_n \to x$ gilt auch $x_{n_k} \to x$ und dann folgt $x = y$, da Grenzwert eindeutig.
Fazit: $x = y \in K$. $1.13 \Rightarrow K$ ist abg. ∎

<u>1.19 Beispiel</u>: Sei $\mathbb{C}$ versehen mit $d(z,w) = |z-w|$. Dann gilt für $K \subseteq \mathbb{C}$:
K ist kompakt $\iff$ K ist abg + beschränkt.
(Wir werden später eine analoge Aussage für $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ beweisen)

Bew: „$\Rightarrow$" ist 1.18.

„$\Leftarrow$" Bolzano-Weierstraß: Ist $(z_n)_n$ Folge in K, so ist $(z_n)_n$ beschr., da K beschränkt. Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow$ $\exists$ Teilfolge $(z_{n_k})_k$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $z_{n_k} \to z$.
Da K abg. und $z_{n_k} \in K$ $\forall k$ folgt $z \in K$. ∎

Achtung: In allg. metr. Räumen gilt nicht, dass beschr. + abg. schon Kompaktheit liefert!
Bsp: $X = (0,1)$ mit Metrik $d(x,y) = |x-y|$.
Dann $K = X$ ist abg. (in X) + beschränkt, aber X ist nicht kompakt, da $(\frac{1}{n})_n$ keine in X konv. Teilfolge besitzt!

Ein nützliches Kriterium für Kompaktheit ist das folgende:

1.22 Satz Sei (X,d) metr. Raum, $K \subseteq X$ kompakt und $A \subseteq K$ abgeschlossen. Dann ist auch A kompakt.
Bew: Sei $(x_n)_n$ Folge in A. Da $(x_n)_n$ auch Folge in K ex. $x \in K$ und Teilf. $(x_{n_k})_k$ mit $x_{n_k} \to x$. Da A abg. folgt $x \in A$. ∎

Bilder kompakter Mengen unter stetigen Fkt. sind auch kompakt.

1.22: Satz Seien (X,d_X), (Y,d_Y) metr. Räume und sei $f: X \to Y$ stetig. Ist dann $K \subseteq X$ kompakt, so ist auch $f(K) \subseteq Y$ kompakt.
Bew: Sei $(y_n)_n$ Folge in $f(K)$. Dann ex. Folge $(x_n)_n$ in K mit $f(x_n) = y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. K kompakt $\Rightarrow$ $\exists$ Teilf. $(x_{n_k})_k$ und $x \in K$ mit $x_{n_k} \to x$. Da f stetig folgt $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) =: y \in f(K)$. ∎

Beobachtung: Ist (X,d) metr. Raum und ist $K \subseteq X$, so ist K kompakt als Teilmenge von X g.d.w. $(K, d|_K)$ kompakt ist. Das folgt sofort aus der Definition, da diese über in K konv. Folgen erfolgt!
Wir benutzen dies für:

1.23 Satz: Sei (X,d) metr. Raum, $K \subseteq X$ kompakt und $f: K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf K sein Maximum und Minimum an, dh. es ex. $x_1, x_2 \in K$ mit
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in K$$
$$(\Leftrightarrow f(x_1) = \min\{f(x) \mid x \in K\},\ f(x_2) = \max\{f(x) \mid x \in K\}).$$
Bew: Nach 1.22 gilt $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, also insb. beschränkt. Dann ex. $S = \sup\{f(x) \mid x \in K\}$.
Wähle eine Folge $(x_n)_n$ in K mit $f(x_n) \to S$. Da K kompakt ex. Teilfolge (x_{n_k}) und $x_0 \in K$ mit $x_{n_k} \to x_0$.
Dann gilt auch $f(x_{n_k}) \to S$. Da f stetig gilt aber auch $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, also folgt $S = f(x_0)$, dh. f nimmt in x_0 sein Maximum an! (Setze also $x_2 := x_0$).
Der Rest geht analog! ∎

1.24 Folgerung: Sei (X,d) metr. Raum, $K \subseteq X$ kompakt, $f: K \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ex. $x_0 \in K$ mit
$$|f(x)| \leq |f(x_0)| \quad \forall x \in K.$$
Insb. ist jede stetige Fkt. auf einem kompakten metr. Raum beschränkt!
Bew. wende 1.23 auf $|f|: K \to \mathbb{R}$ an. ∎

1.25 Definition (Vollständigkeit) Sei (X,d) ein metr. Raum.
Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ ex. mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon \ \forall n,m \geq N$.
X heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert

1.26: Bsp (1) Ist $X = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) mit $d(x,y) = |x-y|$, so ist X vollständig.

(2) Ist $X = (0,1)$ mit $d(x,y) = |x-y|$, so ist X nicht vollständig, denn $(\frac{1}{n})_n$ ist Cauchy-Folge in X, die nicht in X konvergiert.

1.27 Satz: Ist (X,d) ein kompakter metr. Raum, so ist (X,d) vollständig.

Bew: Sei $(x_n)_n$ Cauchy-Folge in X. Da X kompakt ex. Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to x$ für ein $x \in X$. Sei nun $\varepsilon > 0$ geg. Dann ex. zu $\frac{\varepsilon}{2}$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n,m \geq N_1$ und ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall k \geq N_2$. Ist dann $N = \max\{N_1, N_2\}$, so folgt für alle $k \geq N$:

$$d(x_k, x) \leq \underbrace{d(x_k, x_{n_k})}_{< \frac{\varepsilon}{2}, \text{ da } n_k \geq k \geq N} + \underbrace{d(x_{n_k}, x)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also $x_n \to x$ für $n \to \infty$. ∎

Beachte: Natürlich ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge! (leichte Übungsaufgabe!).

Vollständige normierte VR erhalten einen besonderen Namen:

1.28 Def: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-VR für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ od. $\mathbb{C}$. Ist V vollst. bzgl. $d(v,w) = \|v-w\|$, so heißt $(V, \|\cdot\|)$ Banachraum.

Bsp: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit $|\cdot|$ sind Banachräume.