§19 Meromorphe Fkt und der Residuensatz

19.1 Def: Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holom. Dann heißt $z_0 \in \mathcal{U}$ eine k-fache Nullst. ($k \in \mathbb{N}$) von f, falls
$$f(z_0), f'(z_0), \dots, f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$$
(Beachte: Ist $\mathcal{U}$ Gebiet und $f \not\equiv 0$, so besitzt f keine ∞-fache Nullstellen (18.27))

19.2 Satz Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \mathcal{U}$. Dann sind äquivalent:

(1) z_0 ist k-fache Nullst. von f.

(2) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ Potenzreihenentw. von f im Pkt z_0, so gilt $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$, $a_k \neq 0$.

(3) Es ex. eine holom. Fkt. $\tilde{f}: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z-z_0)^k \tilde{f}(z_0)$.

Bew: (1) $\Leftrightarrow$ (2) folgt aus $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Setze
$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \frac{1}{(z-z_0)^k} f(z) & , z \neq z_0 \\ a_k & , z = z_0 \end{cases}.$$

Dann ist $\tilde{f}$ holom. auf $\mathcal{U} \setminus \{z_0\}$ und in $U_r(z_0) \subseteq \mathcal{U}$ gilt $\tilde{f}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k}$ holom. auf $U_r(z_0)$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Ableiten mit Leibnizregel $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

19.3 Def: Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f, g: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $g \not\equiv 0$. Dann heißt $\frac{f}{g}: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ <u>meromorphe Fkt.</u> auf $\mathcal{U}$.

<u>Achtung</u>: $\frac{f}{g}$ ist nicht definiert in den Nullst. von g!
Diese Nullstellen heißen die <u>Singularitäten</u> von $\frac{f}{g}$.

19.4 Bem Sei z_0 eine Singularität von $\frac{f}{g}: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$. ($m \geq 0$)
Sei z_0 k-fache Nullst. von g ($k \geq 1$) und m-fache Nullst. von f

Dann unterscheiden wir grundsätzlich die folgenden Fälle:

1. Fall: $m \geq k$ (Hebbare Singularität)

Seien dann $\tilde{f}, \tilde{g}$ wie in 19.2, so folgt

$$\frac{f}{g} = \frac{(z-z_0)^m \tilde{f}}{(z-z_0)^k \tilde{g}} = (z-z_0)^{m-k} \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}} \text{ auf } U \setminus \{z_0\}$$

Da $\tilde{g}(z_0) \neq 0$ ist die rechte Seite auch in z_0 wohldef. und holomorph.

2. Fall: $m < k$ (Pol der Ordnung $k-m$)

Dann $\frac{f}{g}(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{k-m}} \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}(z)$ mit $\frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}(z_0) \neq 0$.

$\frac{f}{g}$ besitzt dann keine holom. Fortsetzung in z_0.

Beachte: Da $g \not\equiv 0$ besitzen die Nullst. von g nach 18.26 keine Häufungspunkte, dh. ist z_0 Nullst. von g, so ex. ein $r > 0$ mit $g(z) \neq 0 \ \forall z \in U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Dann besitzt auch $\tilde{g}(z)$ in $U_r(z_0)$ keine Nullstelle und die Fkt

$$h : U_r(z) \to \mathbb{C} \ ; \ h = \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}} \text{ ist holom. auf } U_r(z_0).$$

Nach dem Potenzreihenentw.-Satz folgt

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \text{mit } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(z_0)} \frac{h(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

für alle $0 < s < r$. Ist dann z_0 ein Pol der Ordnung $l = k-m > 0$ der merom. Fkt. $\frac{f}{g}$, so folgt:

$$\int_{\partial B_s(z_0)} \frac{f}{g}(z)\, dz = \int_{\partial B_s(z_0)} \frac{h(z)}{(z-z_0)^l} dz = 2\pi i \, c_{l-1}$$

Auf der anderen Seite gilt $c_{l-1} = \frac{h^{(l-1)}(z_0)}{(l-1)!}$.

Wenn $\frac{f}{g}(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^l} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n-l}$ erhalten wir

$$\frac{f}{g}(z) = \sum_{n=-\ell}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \quad \text{auf } U_r(z_0)\setminus\{z_0\}$$

mit $b_n = c_{n+\ell}$, $n \geq -\ell$. Insb. folgt dann $b_{-1} = c_{\ell-1}$.

19.6 Def Die Darst. $\frac{f}{g}(z) = \sum_{n=-\ell}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ heißt Laurent-Reihen-Darst. von $\frac{f}{g}$ auf $U_r(z_0)\setminus\{z_0\}$. Der Koeffizient b_{-1} heißt dann das Residuum von $\frac{f}{g}$ im Punkt z_0. Bezeichng: $Res_{z_0}\left(\frac{f}{g}\right)$.

Wir fassen zusammen:

19.7 Satz Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $\frac{f}{g}: U \to \mathbb{C}$ meromorph. Ist dann $z_0 \in U$ ein Pol der Ordnung $\ell > 0$ von $\frac{f}{g}$, so gilt:

(1) $\exists\, r > 0$ und eine holom. Fkt. $h: U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $h(z_0) \neq 0$ und $\frac{f}{g}(z) = \frac{1}{(z-z_0)^\ell} h(z)$ $\forall z \in U_r(z_0)\setminus\{z_0\}$.

(2) Es ex. eine (eindeutige) Reihendarst.
$$\frac{f}{g}(z) = \sum_{n=-\ell}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \quad \text{auf } U_r(z_0)\setminus\{z_0\}.$$

(3) Ist $0 < s < r$, so gilt $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(z_0)} \frac{f}{g}(z)\,dz = b_{-1} = Res_{z_0}\left(\frac{f}{g}\right)$

(4) Es gilt $Res_{z_0}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{h^{(\ell-1)}(z_0)}{(\ell-1)!}$.

Wir wollen nun den obigen Satz benutzen, um Wegintegrale $\int_\gamma \frac{f}{g}(z)\,dz$ für beliebige geschlossene (stückw. stetig diffb.) Wege $\gamma: [a,b] \to U$; $\gamma(a) = \gamma(b)$ zu berechn. Dazu def. wir

~~**19.8 Umlaufzahl:** Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ geschlossener Weg und $a \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz = k2\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Die Zahl k heißt dann Umlaufzahl von γ bzgl a.~~

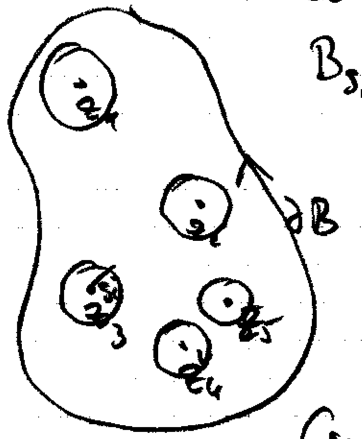
19.8 Residuensatz

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\frac{f}{g}: U \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $B \subseteq U$ kompakt mit ∂B stückweise glatt. Seien $z_1, \ldots, z_m \in \mathring{B} = B \setminus \partial B$ die im Inneren von B liegenden Pole von $\frac{f}{g}$. Dann gilt

$$\int_{\partial B} \frac{f}{g}(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}_{z_i}\left(\frac{f}{g}\right)$$

(wobei ∂B im positiven Sinn durchlaufen wird).

Bew:
Skizze



Für jedes $1 \leq i \leq m$ wähle ein $s_i > 0$ mit $B_{s_i}(z_i) \subseteq \mathring{B}$ und $B_{s_i}(z_i) \cap B_{s_j}(z_j) = \emptyset$ für alle $i \neq j$. Setze $\tilde{B} = B \setminus \bigcup_{i=1}^{m} U_{s_i}(z_i)$. Dann ist $\tilde{B}$ kompakt mit $\partial\tilde{B}$ stückw. glatt und $\frac{f}{g}$ holom. auf einer offenen Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{B}$. Nach Cauchy folgt $\int_{\partial\tilde{B}} \frac{f}{g}(z)\,dz = 0$. Damit:

$$0 = \int_{\partial\tilde{B}} \frac{f}{g}(z)\,dz = \int_{\partial B} \frac{f}{g}(z)\,dz - \sum_{i=1}^{m} \int_{\partial B_{s_i}(z_i)} \frac{f}{g}(z)\,dz, \text{ also}$$

$$\int_{\partial B} \frac{f}{g}(z)\,dz = \sum_{i=1}^{m} \int_{\partial B_{s_i}(z_i)} \frac{f}{g}(z)\,dz \overset{19.7}{=} 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}_{z_i}\left(\frac{f}{g}\right).$$

$\blacksquare$

19.9 Anwendung:

Wir wollen Satz 19.8 anwenden um Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ zu lösen, wobei $p, q: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Polynome mit $\operatorname{grad} q \geq \operatorname{grad} p + 2$, und $\frac{p}{q}$ gekürzt, d.h. p und q besitzen keine gemeinsamen (komplexen) Nullstellen. Wir nehmen an, dass q keine reelle Nullst. besitzt. Wir wissen dann, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ existiert. Ist dann $z \in \mathbb{C}$ Nullst. von q, so ist z ein Pol der merom. Fkt. $\frac{p}{q}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

so ist z Pol d. Ordnung l von $\frac{p}{q}$.

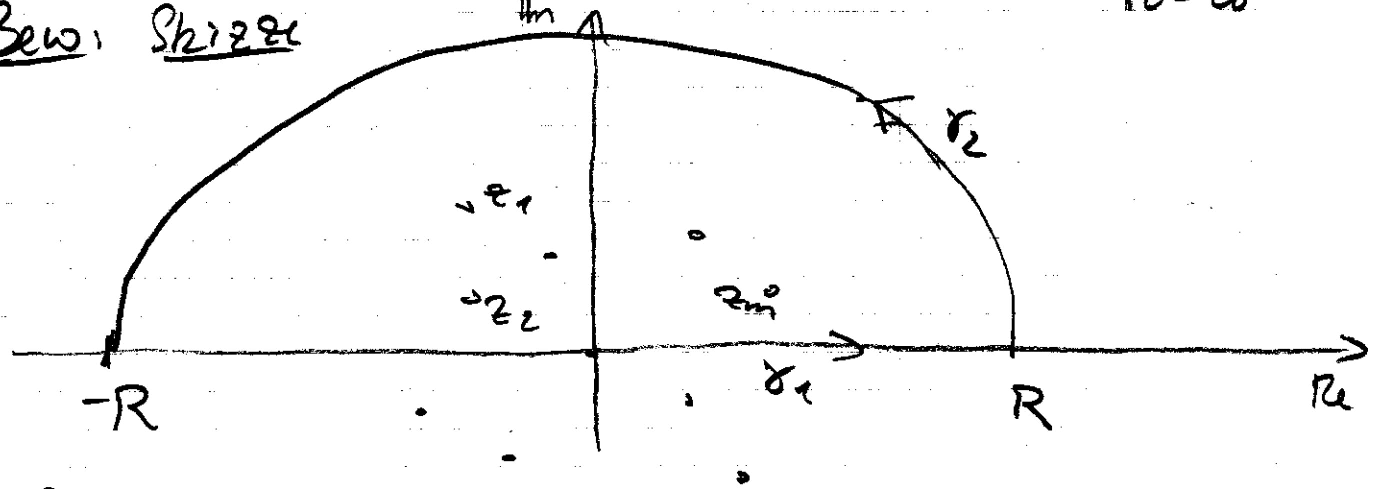
~~Wir nehmen an, dass q keine reelle Nullstelle besitzt. Dann gilt:~~

<u>Satz</u>: Sind p, q wie oben mit $\operatorname{grad}(q) \geq \operatorname{grad}(p) + 2$. Sind dann $z_1, \dots, z_m$ diejenigen Nullst. von q mit $\operatorname{Im}(z_i) > 0 \ \forall\, 1 \leq i \leq m$. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res}_{z_i}\left(\frac{p}{q}\right).$$

Ferner gilt: Ist z_i Nullst. von q d. Ordnung $l_i > 0$, so gilt
$$\operatorname{Res}_{z_i}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{(l-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{l-1}\left((z-z_0)^l \frac{p}{q}\right)\Big|_{z=z_0}$$

<u>Bew.</u>: <u>Skizze</u>



Für $R > 0$ betr. den Halbkreis mit Radius R in d. oberen Halbebene. Der Rand wird positiv parametr. durch
$\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}$; $\gamma(t) = t$, $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$; $\gamma_2(t) = Re^{it}$.
Wähle R so groß, dass alle $z_1, \dots, z_m$ innerhalb des Halbkreises liegen. Dann liefert der Residuensatz:

$$\int_{-R}^{R} \frac{p(t)}{q(t)}\, dt + \int_0^{\pi} \frac{p(Re^{it})}{q(Re^{it})}\, iRe^{it}\, dt = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Res}_{z_i}\left(\frac{p}{q}\right).$$

$\downarrow R \to \infty$ $\quad\quad$ $? \downarrow R \to \infty$.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{q(t)}\, dt$ $\quad\quad$ 0

<u>Nun gilt</u>: für $\left| iz \frac{p(z)}{q(z)} \right| = \left| \frac{iz(a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k)}{c_0 + c_1 z + \dots + c_{k+2} z^{k+2}} \right| \leq$

$$= \left| \frac{\frac{a_0}{z^{k+1}} + \frac{a_1}{z^k} + \dots + \frac{a_k}{z}}{\frac{c_0}{z^{k+2}} + \dots + \frac{c_{k+1}}{z} + c_{k+2}} \right| \to 0 \text{ für } |z| \to \infty.$$

Damit folgt $\left| \frac{p(Re^{it})}{q(Re^{it})} iRe^{it} \right| \to 0$ für $R \to \infty$ (und zwar glm in $t \in [0,\pi]$) und damit folgt

$$\int_0^\pi \frac{p}{q}(Re^{it})\, iRe^{it}\, dt \to 0 \text{ für } R \to \infty.$$

19.10 Bsp (1) Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$. $(p = 1,\ q = x^2+1)$

Die komplexen Nullst. von $q(z) = z^2+1$ sind $\pm i$, wo $q(z) = (z-i)(z+i)$. (Ordnung $= 1$, ?). Damit folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = 2\pi i\, \mathrm{Res}_i\left(\frac{p}{q}\right).$$

Nach d. Formel für das Residuum gilt

$$\mathrm{Res}_i\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{(1-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{1-1}\left((z-i)\frac{1}{z^2+1}\right)\Big|_{z=i} = \frac{1}{(z+i)}\Big|_{z=i} = \frac{1}{2i}$$

Es folgt $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \pi$.

(2) Berechne $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$. Die Fkt ist gerade, also folgt

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Nun sind $\pm i$ 2-fache Nullst. vom Nenner und keine Nullst vom Zähler. Nach dem Satz folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\pi i\, \mathrm{Res}_i\left(\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right).$$

Da i doppelte Nullst. folgt

$$\mathrm{Res}_i\left(\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right) = \frac{1}{(2-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{(2-1)}\left((z-i)^2\frac{z^2}{z^2+1}\right)_{z=i}$$

$$= \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+i)^2}\right)_{z=i} = \left(\frac{2z(z+i)^2 - 2(z+i)z^2}{(z+i)^4}\right)_{z=i} = \frac{8i^3 - 4i^3}{(2i)^4} = \frac{1}{4i}$$

Es folgt: $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}(2\pi i)\frac{1}{4i}$
$= \frac{\pi}{4}$.

In den Büchern finden Sie noch viel allgemeinere Formeln und viele weitere Anwendungen des Residuensatzes.

Fehlerhinweis:

Bei einer Durchsicht des Manuskripts ist mir ein Fehler bei der Def. der L^p-Räume $1<p<\infty$ und beim Satz von Tonelli aufgefallen. In beiden Situationen ist es notwendig, bei den Flt. messbarkeit vorauszusetzen, in dem Sinne, dass eine gef. Flt. $f: A \to \mathbb{C}$ auf $A \cap [-N,N]^n$ integrierbar ist $\forall N \in \mathbb{N}$. (siehe Def. der L^∞-Räume).

Bitte berichtigen!