Kapitel II, Das Lebesgue-Integral (Nach Königsberger Analysis II)

§9 Definition des Lebesgue-Integrals

Erinnerung: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ beschr. Intervall, so ist I von der Form: $I = [a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
bzw. $I = \{a\} = [a,a]$, $a \in \mathbb{R}$.
Wir setzen $|I| = b-a$ (Intervalllänge).

9.1 Def: Ein Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein direktes Produkt
$Q = I_1 \times \dots \times I_n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in I_i, 1 \le i \le n\} \subseteq \mathbb{R}^n$,
wobei $I_1,\dots,I_n$ beschränkte Intervalle in $\mathbb{R}$ sind. Ist $Q = I_1 \times \dots \times I_n$, so def. wir das ($n$-dimensionale) Volumen $V(Q)$ durch $V(Q) := \prod_{i=1}^{n} |I_i|$.

9.2 Def: a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die charakteristische Fkt. $1_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von A ist def. durch

$$1_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

b) Eine Fkt. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt Treppenfkt, falls endlich viele Quader $Q_1,\dots,Q_e \subseteq \mathbb{R}^n$ und komplexe Zahlen $c_1,\dots,c_e \in \mathbb{C}$ ex. mit

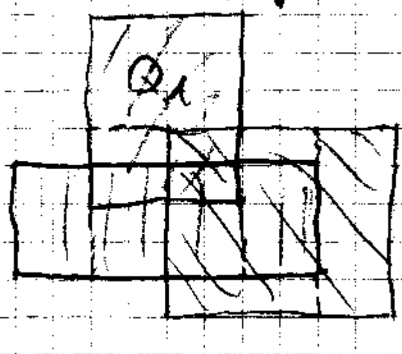
$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{e} c_j 1_{Q_j}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

9.3 Bemerkung: a) Mit etwas Mühe und vollst. Induktion zeigt man: Ist φ Treppenfkt., so ex. Quader $\tilde{Q}_1,\dots,\tilde{Q}_r$ und komplexe Zahlen $d_1,\dots,d_r \in \mathbb{C}$ mit

$$\varphi = \sum_{k=1}^{r} d_k 1_{\tilde{Q}_k} \quad \text{und } \tilde{Q}_i \cap \tilde{Q}_j = \emptyset \ \forall i \ne k$$

Dann gilt: $\varphi(x) = \begin{cases} d_k, & \text{falls } x \in \tilde{Q}_k \text{ für ein } k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$

Im Fall $n=2$ kann man sich diese Aussage leicht durch die folgende Skizze klarmachen:



$\equiv = Q_1$

$\text{\\} = Q_2$

$||| = Q_3$

Ergänze gestrichelte Linien um die Quader entsprechend in Teilquader zu zerlegen, und addiere die Fkt.-Werte auf den Schnittquadern. Die Ränder dürfen dann jeweils nur zu einem benachbarten Quader zugeordnet werden.

b) Es folgt sofort aus d. Definition: Linearkombinationen und Produkte von Treppen Fkt. sind wieder Treppen Fkt. Insbesondere ist

$T(\mathbb{R}^n) := \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ Treppen Fkt.}\}$ ein $\mathbb{C}$-VR.

<u>9.4 Definition</u> Sei $\varphi = \sum_{j=1}^{\ell} c_j 1_{Q_j} \in T(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx := \sum_{j=1}^{\ell} c_j V(Q_j)$$ das <u>Integral</u> von φ

<u>9.5 Satz</u> Sei $\varphi \in T(\mathbb{R}^n)$. Dann hängt das Integral von φ <u>nicht</u> von der speziellen Darst. von φ als Treppenfkt. ab, dh ist $\varphi = \sum_{j=1}^{\ell} c_j 1_{Q_j} = \sum_{k=1}^{r} d_k 1_{\tilde{Q}_k}$, so gilt

$$\sum_{j=1}^{\ell} c_j V(Q_j) = \sum_{k=1}^{r} d_k V(\tilde{Q}_k).$$

<u>Bew:</u> Induktion nach n:

<u>$n=1$</u>: Sei $\varphi = \sum_{j=1}^{\ell} c_j 1_{I_j} = \sum_{k=1}^{r} d_k 1_{\tilde{I}_k}$. Wähle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a<b$ und $I_j, \tilde{I}_k \subseteq [a,b]$ $\forall j,k$. Dann ist φ auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar und nach den Rechenregeln für das Riemann-Integral folgt

$$\sum_{j=1}^{\ell} c_j |I_j| = \int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{r} d_k |\tilde{I}_k|.$$

<u>$n>1$</u>: Die Beh. sei gezeigt für alle $1 \le p < n$. Ist dann $1 \le p < n$ fest gewählt, so schreibe $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ und

die Elemente des $\mathbb{R}^n$ als Paare (x,y), $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^{n-p}$!

Für festes $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ definiere

$$\varphi_y : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}; \quad \varphi_y(x) := \varphi(x,y).$$

Für jeden Quader $Q = I_1 \times \dots \times I_n \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$Q = Q^p \times Q^{n-p} \text{ mit } Q^p = I_1 \times \dots \times I_p, \; Q^{n-p} = I_{p+1} \times \dots \times I_n.$$

Dann folgt $V(Q) = V(Q^p)\cdot V(Q^{n-p})$ und

$$1_Q(x,y) = 1_{Q^p}(x)\, 1_{Q^{n-p}}(y).$$

Damit folgt für φ:

$$\varphi_y(x) = \varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j 1_Q(x,y) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j 1_{Q_j^p}(x)\, 1_{Q_j^{n-p}}(y),$$

also $$\varphi_y = \sum_{j=1}^{\ell} (c_j 1_{Q_j^{n-p}}(y))\, 1_{Q_j^p} \in T(\mathbb{R}^p).$$

Die Fkt φ_y hängt nicht von der spez. Darst. von φ ab!

Nach Ind. Vor. hängt dann auch

$$\phi(y) := \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x)\, dx$$

nicht von der speziellen Darst. von φ ab. Wir erhalten:

$$\phi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x)\, dx = \sum_{j=1}^{\ell} c_j 1_{Q_j^{n-p}}(y) V(Q_j^p) = \sum_{j=1}^{\ell} (c_j V(Q_j^p))\, 1_{Q_j^{n-p}}(y)$$

und analog $$\phi(y) = \sum_{k=1}^{r} (d_k V(\tilde{Q}_k^p))\, 1_{\tilde{Q}_k^{n-p}}(y).$$

Da $n-p < n$ folgt mit Ind. Vor. wiederum:

$$\sum_{j=1}^{\ell} c_j \underbrace{V(Q_j^p) V(Q_j^{n-p})}_{V(Q_j)} = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \phi(y)\, dy = \sum_{k=1}^{r} d_k \underbrace{V(\tilde{Q}_k^p) V(\tilde{Q}_k^{n-p})}_{V(\tilde{Q}_k)}$$

∎

Aus dem letzten Schritt des Beweises erhalten wir insbesondere die folgende wichtige Formel:

9.6 Folgerung (Fubini für Treppenfunktionen) Sei $\varphi \in T(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < n$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \overbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x,y)\, dx \right)}^{=\phi(y),} dy.$$

Wir werden später sehen, dass man auch allgemeinere Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ iterativ berechnen kann! Mit 9.6 und Induktion nach n zeigt man dann leicht:

9.7 Lemma Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in T(\mathbb{R}^n)$ und $c \in \mathbb{C}$. Dann gelten:

1) $$\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_1 + \varphi_2)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_2(x)\, dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (c\varphi)(x)\, dx = c\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx\right).$$

2) Sind φ_1, φ_2 reellwertig mit $\varphi_1 \leq \varphi_2$, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(x)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_2(x)\, dx$$

Bew: Übungsaufgabe!

Anders als beim Riemann-Integral, bei dem wir nur beschr. Fkt zugelassen haben, erlauben wir bei den Lebesgue-Integral auch unbeschr. Fkt, bzw. Funktionen, die den Wert ∞ annehmen. Dazu benutzen wir die folgende Konventionen zum Rechnen mit ∞:

9.8 Notation (Rechnen in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) Wir setzen:

a) $|\infty| = \infty$, $\overline{\infty} = \infty$ und $r < \infty$ $\forall r \in \mathbb{R}$.

b) $\infty + c = c + \infty = \infty$ $\forall c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

c) $\infty \cdot c = c \cdot \infty = \infty$ $\forall c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $c \neq 0$ und $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

d) Ist $(c_k)_k \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Folge mit $c_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, so setzen wir $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \infty$, falls die Reihe nicht konvergiert.

Beachte: Aus (b) und (c) folgt auch $c - \infty = c + (-1)\infty = c + \infty = \infty$ $\forall c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Insb. gilt $\infty - \infty = \infty$!

9.9 Definition Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine Funktion.

a) Eine Hüllreihe zu f ist eine Reihe $\phi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbb{1}_{Q_k}$ mit

(1) $c_k \in \mathbb{R}$ und $c_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

(2) Q_k ist offener Quader im $\mathbb{R}^n$ $\forall k \in \mathbb{N}$ (also $Q_k = I_1^k \times \dots \times I_n^k$ mit I_i^k offenes beschränktes Intervall $\forall 1 \leq i \leq n$).

(3) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt $|f(x)| \leq \phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbb{1}_{Q_k}(x) \in [0, \infty]$

b) Ist $\phi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbb{1}_{Q_k}$ eine Hüllreihe zu f, so heißt

$$I(\phi) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k V(Q_k) \in [0, \infty]$$ der Inhalt von ϕ.

c) Die L^1-Halbnorm von f ist def. durch

$$\|f\|_1 := \inf\{ I(\phi) \mid \phi \text{ Hüllreihe zu } f \} \quad (\in [0, \infty]).$$

(Skizze!)

9.10 Bem: a) Ist $c_k = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$ und ist $Q_k = (-k, k)^n$, so ist $\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbb{1}_{Q_k}(x) = \infty$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Also ist ϕ eine Hüllreihe zu jeder Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Natürlich gilt $I(\phi) = \infty$. Ist $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, so dass $I(\phi) = \infty$ für jede Hüllreihe ϕ von f, so folgt natürlich $\|f\|_1 = \infty$.

b) Im allg. gilt nicht: $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$.

Bsp: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$; $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$. Ist dann

$\phi_\ell = \mathbb{1}_{Q_\ell}$ mit $Q_\ell = (-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell})^n$, so ist ϕ_ℓ Hüllreihe für f (mit $Q_1 = Q_\ell$, $c_1 = 1$ und $c_k = 0$ $\forall k > 1$) mit $I(\phi_\ell) = (\frac{2}{\ell})^n \to 0$ für $\ell \to \infty$. Ist also $\varepsilon > 0$ bel, so ex. $\ell_0 \in \mathbb{N}$ mit $I(\phi_\ell) < \varepsilon$ $\forall \ell \geq \ell_0$, also

$$\|f\|_1 \leq I(\phi_\ell) < \varepsilon \;\; \forall \ell \geq \ell_0. \text{ Es folgt } \|f\|_1 = 0.$$

Übungsaufgabe: Zeige: Ist $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $f(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$, so gilt auch $\|f\|_1 = 0$.

9.11 Lemma Seien $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $c \in \mathbb{C}$. Dann gelten:

(1) $\|f+g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1$ (Δ-Ungl.)

(2) $\|cf\|_1 = |c|\,\|f\|_1$

(3) $\|\,|f|\,\|_1 = \|f\|_1$ und $|f| \le |g| \Rightarrow \|f\|_1 \le \|g\|_1$.

Bew: (1) Sei o.B.d.A. $\|f\|_1 + \|g\|_1 < \infty$ (sonst klar!).
Sei $\varepsilon > 0$ bel. und wähle Hüllreihen ϕ, ψ zu f und g mit $I(\phi) \le \|f\|_1 + \frac{\varepsilon}{2}$, $I(\psi) \le \|g\|_1 + \frac{\varepsilon}{2}$.
Wegen $|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \phi(x) + \psi(x)$ ist $\phi + \psi$ Hüllreihe zu $f+g$ und damit folgt

$$\|f+g\|_1 \le I(\phi+\psi) = I(\phi) + I(\psi) \le \|f\|_1 + \|g\|_1 + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow$ (1).
(Übung: Überlege, dass $I(\phi+\psi) = I(\phi) + I(\psi)$ gilt!)

(2) folgt aus $\phi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k}$ Hüllreihe zu $f \Leftrightarrow |c|\phi = \sum_{k=1}^{\infty} |c| c_k 1_{Q_k}$ Hüllreihe zu cf, und $I(|c|\phi) = |c| I(\phi)$.

(3) Ist klar, da jede Hüllreihe zu g auch Hüllreihe zu f. ∎

Die Aussage in 9.11(3) lässt sich auch auf abz. viele Funktionen $f_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $k \in \mathbb{N}$ verallgemeinern, d.h. es gilt

9.12 Lemma (Verallg. Δ-Ungl.) Seien $f_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Fkt. Dann gilt $\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right\|_1 \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1$

Bew: siehe Königsberger, Analysis II.

9.13 Ist $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ ein bel. Quader im $\mathbb{R}^n$, so gilt $\|1_Q\|_1 = V(Q)$.

(i) Sei dazu zunächst Q ein offener Quader im $\mathbb{R}^n$.
Dann ist $\phi = 1_Q$ Hüllreihe zu 1_Q, also folgt $\|1_Q\|_1 \le I(1_Q) = V(Q)$. Auf der anderen Seite folgt für jede Hüllreihe ϕ, dass $1_Q \le \phi$, also $V(Q) = I(1_Q) \le I(\phi)$

für jede Hüllreihe ϕ zu 1_Q. Damit folgt:

$$\|1_Q\|_1 = \inf\{I(\phi) \mid \phi \text{ Hüllreihe zu } 1_Q\} \geq V(Q).$$

Also folgt $\|1_Q\|_1 = V(Q)$.

(2) Sei nun $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ bel. Quader, also

$I_i = [a_i, b_i]$, (a_i, b_i), $[a_i, b_i)$, oder $(a_i, b_i]$.

Setze $\mathring{Q} = \mathring{I}_1 \times \dots \times \mathring{I}_n$ mit $\mathring{I}_i = (a_i, b_i)$. Dann gilt

$1_{\mathring{Q}} \leq 1_Q$, also $V(Q) = V(\mathring{Q}) = \|1_{\mathring{Q}}\|_1 \leq \|1_Q\|_1$.

Auf der anderen Seite gilt mit $I_i^\ell = (a_i - \frac{1}{\ell}, b_i + \frac{1}{\ell})$ und $Q_\ell = I_1^\ell \times \dots \times I_n^\ell$: $\phi_\ell = 1_{Q_\ell}$ ist Hüllreihe zu 1_Q mit

$$I(Q_\ell) = V(Q_\ell) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i + \tfrac{2}{\ell}) \longrightarrow \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = V(Q)$$

für $\ell \to \infty$. Damit folgt $\|1_Q\|_1 \leq V(Q)$, und es folgt auch hier $\|1_Q\|_1 = V(Q)$.

Allgemein kann man mit etwas Aufwand zeigen:

<u>9.14</u> <u>Satz</u> Für alle $\varphi \in T(\mathbb{R}^n)$ gilt: $\|\varphi\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \, dx$.

<u>Beweisidee</u>: Schreibe $\varphi(x) = \sum_{k=1}^r d_k 1_{Q_k}$ mit $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann gilt $|\varphi(x)| = \sum_{k=1}^r |d_k| 1_{Q_k}$. Ähnlich wie in 9.13(1) folgt zunächst $\|\varphi\|_1 \geq \|\sum_{k=1}^r |d_k| 1_{\mathring{Q}_k}\|_1 = \sum_{k=1}^r |d_k| V(Q_k)$

$= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \, dx$. Wie in 9.13(2) (angewandt auf alle Q_k) schließt man dann auf die andere Richtung. ☒

<u>Bemerkung</u>: In den obigen Argumenten haben wir die folgende Tatsache benutzt: Sind ϕ, ψ Hüllreihen mit $\phi(x) \leq \psi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, so gilt auch $I(\phi) \leq I(\psi)$. Diese Aussage ist anschaulich klar, aber ein genauer Bew. wäre durchaus aufwändig!

9.15 Lemma Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine Flt. und sei $(\varphi_k)_k$ eine Folge von Treppenflt. auf $\mathbb{R}^n$ mit $\|f-\varphi_k\|_1 \to 0$ für $k \to \infty$. Dann gelten:

1) Die Folge $\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\,dx\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$.

2) Ist $(\psi_k)_k$ eine weitere Folge von Treppenflt. mit $\|f-\psi_k\|_1 \to 0$ für $k\to\infty$, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x)\,dx.$$

Bew: Für bel. Treppenflt. $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} &\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx\right| \le \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)-\psi(x)|\,dx \overset{9.14}{=} \|\varphi-\psi\|_1 \\ &= \|\varphi - f + f - \psi\|_1 \le \|\varphi - f\|_1 + \|\psi - f\|_1 \end{aligned}\right\} (*).$$

Damit folgt: Ist $\varepsilon>0$ und $N\in\mathbb{N}$ mit $\|f-\varphi_k\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall k\ge N$, so ist $\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) - \varphi_\ell(x)\,dx\right| \overset{(*)}{\le} \|\varphi_k - f\|_1 + \|\varphi_\ell - f\|_1 < \varepsilon$ $\forall k,\ell\ge N$.

Also ist $\left(\int \varphi_k(x)\,dx\right)_k$ Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ und damit konvergent. (2) folgt dann aus

$$\left|\int (\varphi_k(x) - \psi_k(x))\,dx\right| \overset{(*)}{\le} \|\varphi_k - f\|_1 + \|\psi_k - f\|_1 \longrightarrow 0. \quad \blacksquare$$

9.16 Def Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ eine Flt. Dann heißt f Lebesgue-integrierbar, falls eine Folge $(\varphi_k)_k \subseteq T(\mathbb{R}^n)$ existiert mit $\|f-\varphi_k\|_1 \to 0$ für $k\to\infty$. Der Limes

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\,dx$$

heißt dann das Lebesgue-Integral von f.

9.17 Bem: Jedes $\varphi\in T(\mathbb{R}^n)$ ist L-integrierbar und es gilt die alte Formel $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = \sum_{j=1}^{\ell} c_j V(Q_j)$, falls $\varphi = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \mathbb{1}_{Q_j}$ (Setze $\varphi_k = \varphi$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Dann $\|\varphi_k - \varphi\|_1 = 0$ $\forall k$)

Wir wollen nun einige elementare Eigenschaften des L-Integrals untersuchen: Wir starten mit:

9.18 <u>Satz</u> Ist f L-intb, so auch $|f|$ und es gilt:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx = \|f\|_1.$$

<u>Bew</u>: Sei $(\varphi_k)_k$ Folge in $T(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f-\varphi_k\|_1 \to 0$.
Wegen $||f|-|\varphi_k|| \leq |f-\varphi_k|$ folgt dann:
$\||f|-|\varphi_k|\|_1 \leq \||f-\varphi_k|\|_1 = \|f-\varphi_k\|_1 \to 0$, also ist $|f|$ integrierbar und $\int |f|\,dx \overset{(*)}{=} \lim_{k\to\infty} \int |\varphi_k|\,dx$.
<u>Zeige</u>: $\int_{\mathbb{R}^n} |f|\,dx = \|f\|_1$. Aus Δ-Ungl. für $\|\cdot\|_1$ folgt:

$$\|\varphi_k\|_1 - \|f\|_1 \overset{(1)}{\leq} \|f-\varphi_k\|_1 \text{ und } \|f\|_1 - \|\varphi_k\|_1 \overset{(2)}{\leq} \|f-\varphi_k\|_1,$$

also
$$\|f\|_1 - \|f-\varphi_k\|_1 \overset{(2)}{\leq} \|\varphi_k\|_1 \overset{(1)}{\leq} \|f\|_1 + \|f-\varphi_k\|_1$$

Mit $k \to \infty$ folgt

$$\|f\|_1 = \lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\|_1 \overset{9.14}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_k(x)|\,dx \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx \quad \blacksquare$$

9.19 <u>Lemma</u> (Rechenregeln)

a) Sind f,g integrierbar und $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, so ist auch $\alpha f+\beta g$ integrierbar und $\int(\alpha f+\beta g)\,dx = \alpha\int f\,dx + \beta\int g\,dx$.

b) f intb. $\Rightarrow$ $\overline{f}$ intb. und $\int \overline{f}\,dx = \overline{\int f\,dx}$.

c) f,g intb. und reell mit $f\leq g \Rightarrow \int f\,dx \leq \int g\,dx$.

d) f,g intb und g beschränkt $\Rightarrow$ $g\cdot f$ integrierbar.

e) $f,g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ intb. $\Rightarrow$ $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ intb
(z.B. $\max(f,g)(x) = \max\{f(x),g(x)\}$). Insbesondere sind $f^+ = \max(f,0)$, $f^- = -\min(f,0)$ integrierbar.

f) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ integrierbar
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ intb. und dann gilt

$$\int f(x)\,dx = \int \mathrm{Re} f(x)\,dx + i\int \mathrm{Im} f(x)\,dx.$$

Bew: (nur im Manuskript, nicht in Vorlesung).

a) Seien $(\varphi_k)_k$ $(\psi_k)_k$ in $T(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f-\varphi_k\|_1 \to 0$ und $\|g-\psi_k\|_1 \to 0$. Dann folgt
$$\|(\alpha f+\beta g)-(\alpha\varphi_k+\beta\psi_k)\|_1 \leq |\alpha|\,\|f-\varphi_k\|_1+|\beta|\,\|g-\psi_k\|_1 \to 0,$$
also $\alpha f+\beta g$ integrierbar und
$$\int \alpha f+\beta g\,dx = \lim_k \int \alpha\varphi_k+\beta\psi_k\,dx = \alpha\lim_k\int\varphi_k dx+\beta\lim_k\int\psi_k dx$$
$$= \alpha\int f\,dx+\beta\int g\,dx.$$

b) Aus $|f-\varphi_k| = |\bar f-\bar\varphi_k|$ und $\|g\|_1 = \|\bar g\|_1$ $\forall g$ folgt
$\|\bar f-\bar\varphi_k\|_1 = \|f-\varphi_k\|_1 \to 0$ und $\int \bar f dx = \lim_k \int \bar\varphi_k dx$
$= \overline{\lim_k \int \varphi_k\,dx} = \overline{\int f\,dx}.$

c) $f\leq g \Rightarrow \int g\,dx-\int f\,dx = \int(g-f)dx = \int|g-f|\,dx = \|g-f\|_1 \geq 0.$

d) Es genügt zu zeigen: Zu jedem $k\in\mathbb{N}$ ex. ein $\varphi_k\in T(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f-\varphi_k\|_1 \leq \frac{1}{k}$. Sei dazu $0<M$ obere Schranke für $|g|$. Da f intb. ex. $\varphi\in T(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f-\varphi\|_1 \leq \frac{1}{2kM}$. Sei $\mu>0$ obere Schranke für $|\varphi|$. Dann ex. ein $\psi\in T(\mathbb{R}^n)$ mit $\|g-\psi\|_1 \leq \frac{1}{2k\mu}$. Wegen
$$|f\cdot g-\varphi\cdot\psi| \leq |fg-\varphi g|+|\varphi g-\varphi\psi| \leq |g|\,|f-\varphi|+|\varphi|\,|g-\psi|$$
$$\leq M|f-\varphi|+\mu|g-\psi|$$
folgt dann $\|f\cdot g-\varphi\cdot\psi\|_1 \leq M\|f-\varphi\|_1+\mu\|g-\psi\|_1 \leq \frac{M}{2kM}+\frac{\mu}{2k\mu} = \frac{1}{k}.$

e) Aus 9.18 und a) folgt sofort
$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ und $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$
sind integrierbar.

f) Folgt aus a), b) und $\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f+\bar f)$, $\operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f-\bar f)$. ∎

Wir wollen nun noch das Integral über Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definieren.

<u>9.20 Definition</u> Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: A \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ eine Fkt.
Sei $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ def. durch $f_A(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.
Dann heißt f über A integrierbar, falls f_A über $\mathbb{R}^n$ integrierbar und wir setzen dann

$$\int_A f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_A(x)\,dx.$$

$\int_A f(x)\,dx$ heißt dann das Integral von f über A.
Ferner setzen wir $\|f\|_{1,A} := \|f_A\|_1$.

<u>9.21 Bem</u>: Durch Fortsetzen aller Fkt. wird klar, dass alle Rechenregeln aus 9.19 und 9.20 auch für integrierb. Fkt. über $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gelten. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$, so bez. wir den $\mathbb{C}$-VR aller über A intb. Fkt. mit $\mathcal{L}^1(A)$, insb. bez. $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ den Raum aller intb. Fkt. auf $\mathbb{R}^n$.

Wir wollen zum Abschluss dieses Abschnitts noch das Lebesgue-Integral auf einem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mit dem Riemann-Integral vergleichen.

<u>9.22 Satz</u> Sei $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemann-intb. Dann ist f auch Lebesgue-intb. über $[a,b]$ und es gilt $\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$
(d.h. die Integrale stimmen überein).

<u>Bew</u>: Sei o.B.d.A. f reell (sonst aufspalten in $\mathrm{Re}\,f$, $\mathrm{Im}\,f$).
Nach der Def. des R-Integrals ex. zu jedem $k \in \mathbb{N}$ Treppenfkt. $\varphi_k, \psi_k: [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_k \le f \le \psi_k$ und $\int_a^b (\psi_k - \varphi_k)\,dx < \frac{1}{k}$, und dann gilt $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_k \int_a^b \varphi_k(x)\,dx$.

Es gilt:

$$\| f_{[a,b]} - \varphi_k \|_1 \le \| \psi_k - \varphi_k \|_1 = \int_a^b |\psi_k(x) - \varphi_k(x)| dx = \int_a^b \psi_k(x) - \varphi_k(x) dx$$

$$< \frac{1}{k} \to 0,$$

Also ist f Lebesgue-intb mit

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Def. sind gleich für Treppenflt. ∎

Tatsächlich gibt es viel mehr Lebesgue-intb. Flt, als Riemann-intb. Funktionen, und daher ist der Begriff des Lebesgue-Integrals wesentlich flexibler!

Bsp: Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

Dann ist f Lebesgue-integrierbar mit $\int_{[0,1]} f(x)dx = 0$ (Übungsaufgabe), aber f ist nicht Riemann-intb.!