

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 26.10.07 bis 13.00 im Briefkasten 158

Blatt 1

Aufgabe 1. (Mündlich) Thema: metrische Räume, offene bzw. abgeschlossene Teilmengen, Konvergenz und Stetigkeit.

- (1) Sei eine Menge $X \neq \emptyset$ versehen mit der *diskreten Metrik* d . Beschreiben Sie für $x \in X$ alle offenen bzw. abgeschlossenen ϵ -Umgebungen von x . Wann ist eine Folge $(x_n)_n$ in X konvergent gegen $x \in X$?
- (2) Es seien $(V_i, \|\cdot\|_i)$ ($i = 1, 2$) zwei normierte Vektorräume und $f : V_1 \rightarrow V_2$ bezeichne eine *lineare* Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
 - (a) f ist *Lipschitz-stetig*, d.h. es gibt ein $C > 0$ mit $\|f(v) - f(w)\|_2 \leq C \cdot \|v - w\|_1$ für alle $v, w \in V_1$.
 - (b) f ist *beschränkt*, d.h. es gibt ein $C > 0$ mit $\|f(v)\|_2 \leq C \cdot \|v\|_1$ für alle $v \in V_1$.
 - (c) f ist stetig (bzw. stetig im Nullpunkt $0 \in V_1$).

Aufgabe 2. (Randpunkt) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Randpunkt* von A (bzgl. d), wenn in jeder ϵ -Umgebung von x sowohl ein Punkt aus A als auch aus $X \setminus A$ liegt. Die Menge ∂A aller Randpunkte von A heißt der Rand von A (bzgl. d).

- (1) Zeigen Sie: $\partial A = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$ und ∂A ist abgeschlossen.
- (2) \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) sei versehen mit der euklidischen Metrik. Untersuchen Sie die folgenden Mengen A auf Offenheit bzw. Abgeschlossenheit und bestimmen Sie ihre Abschlüsse \bar{A} und Ränder ∂A :
 - (a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ und } |y| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$.
 - (b) $A := \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
 - (c) $A \subset \mathbb{R}^n$ ist das *Standardsimplex* $A := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \text{ und } x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$.

Aufgabe 3. (Produktmetrik) Es seien (X_i, d_i) ($i = 1, 2$) zwei metrische Räume. Zeigen Sie:

- (1) Durch $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$ wird auf $X := X_1 \times X_2$ eine Metrik erklärt (die Produktmetrik), derart daß die Projektion auf die i -te Komponente $p_i : X \rightarrow X_i$ stetig ist ($i = 1, 2$).
- (2) Eine Folge $((x_n, y_n))_n$ in X ist bzgl. dieser Metrik d genau dann konvergent gegen $(x, y) \in X$, wenn $(x_n)_n$ gegen x und $(y_n)_n$ gegen y konvergiert.

- (3) Sind $A_i \subset X_i$ offen (bzw. abgeschlossen) für $i = 1, 2$, so ist auch $A := A_1 \times A_2 \subset X$ offen (bzw. abgeschlossen). Geben Sie ein Beispiel an, in welchem dieses nicht die einzigen offenen (bzw. abgeschlossenen) Teilmengen von X sind.

Aufgabe 4. (Äquivalente Metriken) Es seien d_1, d_2 zwei Metriken auf der Menge $X \neq \emptyset$. d_1 heißt *stärker* als d_2 (in Zeichen $d_1 \succeq d_2$), wenn die identische Abbildung $id_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ stetig ist. Die Metriken heißen äquivalent ($d_1 \simeq d_2$), wenn $d_1 \succeq d_2$ und $d_2 \succeq d_1$ ist. Zeigen Sie:

- (1) Die folgenden Aussagen sind äquivalent: (a) d_1 ist stärker als d_2 .
 (b) Konvergiert eine Folge $(x_n)_n$ in X gegen $x \in X$ bezüglich d_1 , so konvergiert sie auch gegen x bezüglich d_2 .
 (c) Ist $A \subset X$ abgeschlossen (bzw. offen) bezüglich d_2 , so ist A auch abgeschlossen (bzw. offen) bezüglich d_1 .
- (2) Sind d_1 und d_2 äquivalente Metriken auf X , so definieren beide die gleichen offenen (bzw. abgeschlossenen) Teilmengen von X und Sie ergeben auch den gleichen Konvergenzbegriff von Folgen $(x_n)_n$ in X .
- (3) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist auch $d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ eine Metrik auf X , welche äquivalent zu d ist.
 Hinweis: Sie dürfen benutzen, daß $[0, \infty[\rightarrow [0, 1[; t \mapsto \frac{t}{1+t}$ streng monoton steigend und bijektiv ist.

Allgemeine Hinweise:

- Übungszeiten: Mo: 8.00-10.00 im M3 und Do: 8.00-10.00 im M4 (die Anfangszeiten sind st.). Erste Übungen am Mo/Do den 22/25.10.07.
- Die Aufgaben sind in Zweiergruppen abzugeben.
- **Briefkasten: Bk. 158.**
- Die erste Aufgabe ist mündlich zu bearbeiten, d.h. die entsprechenden Begriffe werden in den Übungen diskutiert. **Die anderen drei Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.** Jede Aufgabe wird mit 5 Punkten bewertet. Um die Klausur mitschreiben zu können, sollten Sie regelmäßig an den Übungen teilnehmen und mindestens 40 % der schriftlichen Aufgaben auf den Übungszetteln erfolgreich bearbeiten.
- Zu der Vorlesung und den Übungen wird parallel von einem studentischen Tutor eine zusätzliche Sprechstunde zum Besprechen von Fragen angeboten: Mo. 18.00-19.00 im SR5.
- Im Laufe des Semesters werden in den Übungen auch zweimal zusätzliche Tests stattfinden, welche der Selbstkontrolle dienen. Die Termine stehen noch nicht fest und werden später rechtzeitig mitgeteilt.
- Alle Studierenden in Bachelor-Studiengängen müssen sich in der Zeit 29.10.07 - 19.11.07 **zusätzlich** über QISPOS zur Vorlesung und zu den Übungen anmelden!
- Klausurtermin: in den Semesterferien. Genaueres wird später bekannt gegeben.