

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 31.01.08 bis 13.00 im Briefkasten 158

Blatt 13

**Aufgabe 44.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $B \subset U$  kompakt mit  $\partial B = \Gamma$  eine stückweise glatte Kurve, welche durch einen positiv orientierten stückweise glatten Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial B$  (mit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial B$  bijektiv) parametrisiert wird. Für festes  $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial B$  bezeichne  $\alpha(x)$  den Winkel zwischen  $x - a$  und dem nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor  $N(x)$  im Punkte  $x \in \partial B$ , also mit

$$\cos(\alpha(x)) = \frac{\langle x - a, N(x) \rangle}{\|x - a\|_2}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des *Gaußschen Integralsatzes*:

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(\alpha(x))}{\|x - a\|_2} d\gamma = \begin{cases} 0 & , \text{für } a \notin B, \\ 2\pi & , \text{für } a \in B. \end{cases}$$

Hinweis: Im Falle  $a \in B$  wähle man eine offene Kreisscheibe  $U_r(a) := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y - a\|_2 < r\} \subset B$  und wende den Gaußschen Integralsatz zunächst auf  $B \setminus U_r(a)$  an.

**Aufgabe 45. (Newton-Potential einer Sphäre)** Sei  $S_r := \{\|x'\|_2 = r\}$  die Sphäre vom Radius  $r > 0$  um den Nullpunkt im  $\mathbb{R}^3$ . Bis auf eine eindimensionale Nullmenge wird diese durch

$$\sigma : (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (x, y)^t \mapsto r \cdot (\cos(x) \cos(y), \sin(x) \cos(y), \sin(y))^t$$

als ein *glattes 2-dimensionales Flächenstück* im  $\mathbb{R}^3$  parametrisiert. Das Newton-Potential  $u(p)$  einer mit einer konstanten Massendichte  $\rho > 0$  belegten Sphäre  $S_r$  im Punkte  $p \in \mathbb{R}^3 \setminus S_r$  ist definiert als

$$u(p) := \int_{S_r} \frac{\rho}{\|x - p\|_2} d\sigma.$$

Zeigen Sie für den Punkt  $p = (0, 0, a)^t$  mit  $r \neq a \geq 0$  gilt:

$$u(p) = \begin{cases} 4\pi \cdot r \cdot \rho & \text{für } 0 \leq a < r, \\ \frac{M}{a} & \text{für } r < a, \text{ mit } M := 4\pi \cdot r^2 \cdot \rho. \end{cases}$$

Bemerkung: Aufgrund der Rotationssymmetrie von  $u$  ist  $u$  somit im Inneren der Sphäre konstant und im Äußeren gleich dem Potential eines im Nullpunkt gelegenen Massenpunktes der Gesamtmasse  $M$  der Sphäre.

**Aufgabe 46.** Sei  $p \in \mathbb{R}^3$  ein Punkt und  $v \in \mathbb{R}^3$  ein Vektor der Länge 1.

$$M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x - p, v \rangle = 0\}$$

bezeichnen die affine Ebene durch den Punkt  $p$  senkrecht zu  $v$ . Zeigen Sie:

- (1) Ist  $b_1, b_2, v$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$  mit  $b_1 \times b_2 = v$ , so ist

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y)^t \mapsto p + x \cdot b_1 + y \cdot b_2$$

eine Parametrisierung von  $M$ , d.h.  $\sigma$  ist zweimal stetig differenzierbar mit Rang  $D\sigma((x, y)^t) = 2$  für alle  $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$  und  $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  ist bijektiv. Für den zugehörigen Einheitsnormalenvektor gilt:

$$N_1(\sigma((x, y)^t)) = v \quad \text{für alle } (x, y)^t \in \mathbb{R}^2.$$

- (2) Aus dem *Stokesschen Integralsatz* folgt für ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$\langle \text{rot } f(p), v \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \cdot \int_{\gamma(\epsilon)} \langle f, d\gamma(\epsilon) \rangle.$$

Hierbei ist  $\gamma(\epsilon) := \sigma \circ \delta(\epsilon)$ , mit

$$\delta(\epsilon) : [0, 2\pi] \rightarrow \partial K_\epsilon = \{\|x'\|_2 = \epsilon\}$$

eine glatte positiv orientierte Parametrisierung der Randsphäre  $S_\epsilon = \partial K_\epsilon = \{\|x'\|_2 = \epsilon\}$  der Kreisscheibe  $K_\epsilon = \{\|x'\|_2 \leq \epsilon\}$  vom Radius  $\epsilon > 0$  um  $0 \in \mathbb{R}^2$ .

Allgemeine Hinweise:

- Übungszeiten: Mo: 8.30-10.00 im M3 und Do: 8.30-10.00 im M4.
- Die Aufgaben sind in Zweiergruppen abzugeben. Briefkasten: Bk. 158.
- Die drei Aufgaben sind in schriftliche Form abzugeben. Jede Aufgabe wird mit 5 Punkten bewertet. Um die Klausur mitschreiben zu können, sollten Sie regelmäßig an den Übungen teilnehmen und mindestens 40% der schriftlichen Aufgaben auf den Übungszetteln erfolgreich bearbeiten.
- Zu der Vorlesung und den Übungen wird parallel von einem studentischen Tutor eine zusätzliche Sprechstunde zum Besprechen von Fragen angeboten: Termin: Mi: 12:00-13:00 im SR5.
- Im Laufe des Semesters werden in den Übungen auch zweimal zusätzliche Tests stattfinden, welche der Selbstkontrolle dienen. Der zweite Test wird dabei als Zusatzblatt 14 herausgegeben werden, welches nicht mehr in schriftlicher Form abzugeben ist.
- **Klausurtermin:** Di. den 04.03.08, 9:00-12:00.
- **Nachklausurtermin:** Mi. den 02.04.08, 9:00-12:00.
- Voraussichtlich in der Zeit 18.02.08-29.02.08 wird zusätzlich ein zweiwöchiges **Tutorium** zur Vorlesung angeboten.