Test 1b zur Vorlesung Mathematik für Physiker III, WS 07/08, Donnerstag, 13.12.2007

Name: **Matrikelnr.:**

Studienfach: **Geburtsdatum:**

In Aufgabe 1 bekommen Sie für jede richtig gelöste Teilaufgabe einen Punkt.

Aufgabe 1.

(1) Es sei (X, d) eine metrischer Raum mit Metrik d.

(a) Wann ist eine Folge $(x_n)_n$ in X eine Cauchy-Folge?

(b) Wann heißt $U \subset X$ offen?

(c) Wann heißt eine Teilmenge $K \subset X$ kompakt?

(2) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung.

(a) Wann heißt f partiell differenzierbar im Punkt $x_0 \in U$?

(b) Sei f in $x_0 \in U$ total differenzierbar. Geben Sie eine Formel für die Richtungsableitung $Df_v(x_0)$ in Richtung von $v \in \mathbb{R}^n$ ($\|v\|_2 = 1$) mit Hilfe der Ableitung $Df(x_0)$ an.

(c) Seien nun $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $g : U \to V$ stetig differenzierbar und bijektiv. Geben Sie ein hinreichendes Kriterium dafür, dass $g^{-1} : V \to U$ differenzierbar ist, und geben Sie dann eine Formel für die Ableitung $Dg^{-1}(y)$, $y \in V$, in Abhängigkeit von $Dg(x)$, $x \in U$ an.

(3) Sei nun $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.

(a) Beschreiben Sie die Hessematrix von f an der Stelle $x_0 \in U$.

(b) Geben Sie ein hinreichendes Kriterium dafür, dass f in einem Punkt $x_0 \in U$ mit $\nabla f(x_0) = 0$ kein lokales Extremum besitzt.

Wahr-oder-Falsch Aufgaben

Bitte beantworten Sie in Aufgabe 2 jede Teilaufgabe mit "wahr" oder "falsch". Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede nicht beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 0 Punkte, und für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen!

Aufgabe 2.

(1) Es sei (X, d) eine metrischer Raum mit Metrik d, und $A_i \subset X$ sei abgeschlossen für alle $i \in I$.

(a) Dann ist auch $\cup_{i \in I} A_i$ abgeschlossen in X.

(b) Dann ist auch $\cap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen in X.

(c) In dem normierten Vektorraun $X = \mathbb{R}^n$ ist jede Teilmenge $K \subset X$ kompakt, welche beschränkt und abgeschlossen ist.

(d) Eine stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ auf einer beschränkten Menge $A \subset X$ nimmt ihr Minimum an.

(2) Sei $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Funktion.

(a) Ist f partiell differenzierbar, so ist f auch total differenzierbar.

(b) Wenn alle Richtungsableitungen von f existieren, so ist f differenzierbar.

(c) Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial y \partial x}$ für $i = 1, 2$.

(d) f_1 sei zweimal stetig partiell differenzierbar, mit $\nabla f((x_0, y_0)^t) = 0$. Ist die Hessematrix von f in $(x_0, y_0)^t$ positiv semidefinit, so hat f dort ein lokales Minimum.