

# Kurze Darstellung des Prüfungsstoffs Mathematik für Physiker I-III, WS 2006–2008

Siegfried Echterhoff

Im folgenden gebe ich eine kleine Aufstellung der wichtigsten Themen der Vorlesungen Mathematik für Physiker I–III, die in der mündlichen Prüfung vorkommen können. Als wichtiges Prinzip bei der Vorbereitung zur Prüfung sollte das folgende beachtet werden: Als erstes muss man mathematische Begriffe und Aussagen (etwa Definitionen und Sätze) genau verstanden haben, bevor man daran geht die Beweise zu lernen! Das Verständnis der Begriffe wird in der Prüfung auch die erste Priorität erhalten. Danach kommt das Verständnis über den Zusammenhang des Stoffes, also insbesondere auch Beweise von einigen zentralen Sätzen, wenn dies machbar erscheint.

Ein anderer Hinweis: Die folgende Liste der Themen muss nicht vollständig sein, d.h. ich gebe keine Garantie, dass ich in der Prüfung nicht auch das eine oder andere Thema aus den Vorlesungen anspreche, das hier nicht explizit aufgeführt wurde. Allerdings taugt die Liste gut zum Setzen von Prioritäten!

## 1. MATHEMATIK FÜR PHYSIKER I. ANALYSIS EINER VERÄNDERLICHEN

**Grundlagen:** Vollständige Induktion (mit Beispielen), Mengen und Abbildungen (die Begriffe injektiv, surjektiv, bijektiv), die reellen Zahlen (welche Eigenschaften hat  $\mathbb{R}$ , der Begriff der Vollständigkeit), Infimum, Supremum, Minimum, Maximum (was ist der Unterschied zwischen Supremum und Maximum), die komplexen Zahlen, Polarkoordinaten (insb. die geometrische Definition von Sinus und Cosinus), Wurzeln aus komplexen Zahlen (mit Hilfe der Polarkoordinaten), Konvergenz von Folgen, Konvergenzkriterien, Cauchyfolgen, Teilfolgen, der Satz von Bolzano-Weierstrass, Konvergenz von Reihen, Konvergenzkriterien (insb. auch einige wichtige Beispiele von konvergenten und nicht konvergenten Reihen, etwa geometrische Reihe, die harmonische Reihe, die alternierende harmonische Reihe, etc.), Potenzreihen (inkl. Potenzreihenentwicklung für  $\sin$ ,  $\cos$  und  $\exp$  kennen—Zusammenhang zu Taylorreihen und Taylorformel aus 2. Semester herstellen können).

**Funktionen:** Stetige Funktionen, Zwischenwertsatz, stetige Funktionen auf kompakten Intervallen, Umkehrfunktionen ( $\arccos$ ,  $\arcsin$ ,  $\arctan$ ,  $\ln$ ), Differenzierbarkeit (wichtig: geometrische Deutung) Ableitungsregeln, Mittelwertsätze (geometrische Deutung), einfache Anwendungen der Mittelwertsätze (z.B. wenn  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f' = 0$ , so ist  $f$  konstant), Regel von l'Hospital, Kurvendiskussion (lokale Maxima, Minima, notwendige und hinreichende Kriterien für die Existenz), das Riemann-Integral, Integrierbarkeit stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen, Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung (warum unterscheiden sich zwei Stammfunktionen einer Funktion nur um eine Konstante?), Integrationsregeln (Substitution, partielle Integration), Uneigentliche Integrale, Integralvergleichskriterium.

## 2. MATHEMATIK FÜR PHYSIKER II. LINEARE ALGEBRA

Lineare Gleichungssysteme (Beschreibung aller Lösungen mit Hilfe einer speziellen Lösung und der Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems), Kriterien für Lösbarkeit (wann existieren Lösungen bzw. wann existiert genau eine Lösung), Rechnen mit Matrizen, invertieren von Matrizen, Vektorräume, Lineare Unabhängigkeit (bzw. Abhängigkeit) von Vektoren, Vektorraumbasen, Lineare Abbildungen, Kern und Bild einer linearen Abbildung, Dimensionsformel, Darstellungsmatrix (wie berechne ich diese—hier könnte ein kleines Beispiel kommen), Basiswechselmatrix, Determinanten (wichtig: geometrische Deutung der Determinanten im  $\mathbb{R}^n$ ), Berechnung von Determinanten, welchen Zusammenhang gibt es zwischen dem Wert der Determinante einer Matrix und der Invertierbarkeit der Matrix? Der Rang einer Matrix (warum ist Zeilenrang=Spaltenrang=Rang?), Eigenwerte, Eigenvektoren (ganz wichtig: ein Eigenvektor ist **niemals** 0), warum sind die Eigenwerte genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms? Diagonalisierbarkeit von Endomorphismen und von Matrizen (was bedeutet das überhaupt), Kriterien für Diagonalisierbarkeit, Rechenverfahren zur Diagonalisierbarkeit, orthogonale und unitäre Vektorräume, Fourierreihen.

## 3. MATHMATIK FÜR PHYSIKER III. ANALYSIS IN MEHREREN VARIABLEN

**Metrische Räume** Metrische Räume, Konvergenz in metrischen Räumen, offene, abgeschlossene und kompakte Teilmengen metrischer Räume, stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen, normierte Räume, Äquivalenz von Normen, Normen auf endlich-dimensionalen Räumen, Vollständigkeit (was ist ein Banachraum?).

**Differenzierbarkeit** (total) differenzierbare Abbildungen, partielle Differenzierbarkeit, Zusammenhang zwischen den Begriffen, wann darf man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen, Satz über implizite Funktionen, Satz über die Umkehrabbildung, (die Aussagen verstehen), lokale Extremwertaufgaben (ohne und mit Nebenbedingungen).

**Integration** Konstruktion/Definition des Lebesgue-Integrals, Rechenverfahren (Fubini, Prinzip von Cavallieri), Transformationsformel, Fouriertransformation (Formel wissen), Kurvenintegrale, Bogenlänge, Stammfunktionen, Oberflächenintegrale, die Sätze von Gauß und Stokes.

**Funktionentheorie** holomorphe Funktionen, der Cauchysche Integralsatz, Potenzreihenentwicklung, meromorphe Funktionen, Residuensatz.

**Wichtiger Hinweis:** Der Stoff des dritten Semesters wird maximal 10 Minuten der Prüfung in Anspruch nehmen, und ich werde zu diesem Teil keine Beweise fragen. Allerdings sollten, wie schon zu Beginn erklärt, die entsprechenden Sätze und Definitionen richtig erklärt werden können.