Übungen zur Vorlesung Einführung in die Algebra WS 2011/12
Prof. Dr. P. Schneider Blatt 1
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Donnerstag, 20.10.2011, 14:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es sei $(H,+)$ eine kommutative Halbgruppe. Sind $(g,h),(g',h') \in H \times H$, so schreiben wir $(g,h) \sim (g',h')$, falls ein Element $k \in H$ existiert mit $g+h'+k = g'+h+k$. Zeigen Sie, dass $\sim$ auf der Menge $H \times H$ eine Äquivalenzrelation ist. Setzen Sie $\overline{H} := (H \times H)/\sim$ und zeigen Sie, dass durch $[(g,h)] + [(g',h')] := [(g+g', h+h')]$ eine wohldefinierte Abbildung $+ : \overline{H} \times \overline{H} \to \overline{H}$ gegeben ist, die die Menge $\overline{H}$ zu einer kommutativen Gruppe macht. Welche Gruppe erhält man hierbei, wenn H die additive Halbgruppe der natürlichen Zahlen einschließlich der Null ist?

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(i) Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ der Körper mit zwei Elementen und $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ die multiplikative Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{F}_2$. Für jedes Element $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ wird durch $(v \mapsto g \cdot v)$ eine Permutation der dreielementigen Menge $\mathbb{F}_2^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ definiert. Zeigen Sie, dass man auf diese Weise einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$ erhält.

(ii) Zeigen Sie, dass die Gruppen $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Q},+)$ und $(\mathbb{Z},+)$ paarweise nicht zueinander isomorph sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Es sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und $\mathrm{Aut}(G)$ die Menge aller Automorphismen von G. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(G)$ bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet. Sie heißt die *Automorphismengruppe von G*. Betrachten Sie für jedes Element $g \in G$ den durch $\mathrm{Int}(g)(h) := g \cdot h \cdot g^{-1}$ definierten Automorphismus $\mathrm{Int}(g)$ von G. Zeigen Sie, dass die durch $(g \mapsto \mathrm{Int}(g))$ definierte Abbildung $\mathrm{Int} : G \to \mathrm{Aut}(G)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Bestimmen Sie $\ker(\mathrm{Int})$, $\mathrm{im}(\mathrm{Int})$ und $\mathrm{Aut}(G)$ im Falle $G = \mathbb{Z}$.