Übungen zur Vorlesung Einführung in die Algebra WS 2011/12
Prof. Dr. P. Schneider Blatt 12
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Donnerstag, 19.01.2012, 14:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte):

(i) Zeigen Sie, dass eine Körpererweiterung vom Grad 2 stets normal ist.

(ii) Betrachten Sie die reelle Zahl $\sqrt[4]{2}$. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})|\mathbb{Q}$ nicht normal ist, die beiden Erweiterungen $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})|\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2})|\mathbb{Q}$ hingegen schon.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(i) Betrachten Sie $\sqrt{2+\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$. Ist die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})|\mathbb{Q}$ normal?

(ii) Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper L des Polynoms $X^4 + 2X^2 - 2$ über $\mathbb{Q}$ und den Grad $[L : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Es sei p eine Primzahl und $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Zeigen Sie, dass das Polynom $X^p - X + a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ separabel und irreduzibel ist.

Hinweis: Für zwei Nullstellen α und β von $X^p - X + a$ in einem algebraischen Abschluss von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gilt $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.