Übungen zur Vorlesung Einführung in die Algebra WS 2011/12
Prof. Dr. P. Schneider Blatt 9
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Donnerstag, 15.12.2011, 14:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es sei R ein kommutativer Ring und n eine positive ganze Zahl. Für $1 \leq i \leq n$ sei das Polynom $f_i \in R[X_1, \ldots, X_n]$ von der Form $f_i(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j$ mit $a_{ij} \in R$. Betrachten Sie den durch $\psi|R = \mathrm{id}_R$ und $\psi(X_i) = f_i$ eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\psi : R[X_1, \ldots, X_n] \to R[X_1, \ldots, X_n]$. Zeigen Sie: Ist die Matrix $A := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in R^{n \times n}$ invertierbar, d.h. existiert eine Matrix $B \in R^{n \times n}$ mit $AB = BA = I_n$, so ist ψ bijektiv.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Es sei R ein kommutativer Ring und n eine positive ganze Zahl. Zeigen Sie, dass die Ringe R und $R[X_1, \ldots, X_n]/(X_1, \ldots, X_n)$ isomorph sind. Folgern Sie: Ist der Ring $R[X_1, \ldots, X_n]$ noethersch, so ist auch der Ring R noethersch.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Es sei R ein kommutativer Ring und n eine positive ganze Zahl. Zeigen Sie:

(i) Ist $A \subseteq R^n$ eine beliebige Teilmenge, so ist

$$I(A) := \{f \in R[X_1, \ldots, X_n] \mid \forall (a_1, \ldots, a_n) \in A : f(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$$

ein Ideal von $R[X_1, \ldots, X_n]$.

(ii) Für $R = \mathbb{Q}$, $n = 2$ und $A := \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ist $I(A)$ das von $X_1 - X_2$ erzeugte Hauptideal von $\mathbb{Q}[X_1, X_2]$.