

Übungen zur Algebra I

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh

Blatt 1 vom 18. Oktober 2007

Aufgabe 1 (Bosch „Algebra“, 1.1.6). Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$\prod_{g \in G} g^2 = 1.$$

Aufgabe 2 (Bosch „Algebra“, 1.1.7). Sei G eine Gruppe, in der jedes Element $g \in G$ die Gleichung $g^2 = 1$ erfüllt.

1. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.
2. Gibt es unendliche Gruppen mit dieser Eigenschaft?

Aufgabe 3 (Bosch „Algebra“, 1.1.3). Sei G ein Monoid. Betrachten Sie folgende Bedingungen:

- (i) Das Monoid G ist eine Gruppe.
- (ii) Für alle $a, x, y \in G$ mit $a \cdot x = a \cdot y$ oder $x \cdot a = y \cdot a$ folgt $x = y$.

Zeigen Sie:

1. Falls G endlich ist, gilt „(ii) \Rightarrow (i)“.
2. Falls G unendlich ist, gilt „(ii) \Rightarrow (i)“ im allgemeinen nicht.

Aufgabe 4 (Allgemeine lineare Gruppe). Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $GL(n, \mathbb{R})$ eine Gruppe bezüglich Komposition. Wieviele Elemente enthält die Untergruppe von $GL(2, \mathbb{R})$ der Vektorraumisomorphismen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die das Quadrat mit den Ecken

$$\{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$$

auf sich selbst abbilden?

Aufgabe 5*. Sind die Gruppen $(\mathbb{C}, 0, +)$ und $(\mathbb{R}_{>0}, 1, \cdot)$ isomorph?

Hinweis. Vergleichen Sie beide Gruppen mit $(\mathbb{R}, 0, +)$.

Abgabe bis zum 25. Oktober 2007, 8:00 Uhr