

Übungen zur Algebra I

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh

Blatt 13 vom 24. Januar 2008

Aufgabe 1.

1. Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Polynoms $X^3 - 9 \cdot X^2 + X - 1$ über \mathbb{Q} , über \mathbb{F}_2 und über \mathbb{F}_5 .
2. Bestimmen Sie alle Zwischenkörper der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}})/\mathbb{Q}$. Welche davon sind über \mathbb{Q} normal?

Aufgabe 2.

1. Seien L/K und L'/K zwei endliche Galoisweiterungen mit isomorpher Galoisgruppe. Sind dann L und L' bereits isomorph?
2. Gibt es eine Galoisweiterung L/\mathbb{Q} mit $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$?

Aufgabe 3 (Bosch „Algebra“, 4.1.7). Sei L ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei $\sigma \in \text{Aut}(L)$ und sei $K := L^\sigma$ der Fixkörper von σ . Zeigen Sie, dass jede endliche Erweiterung von K eine zyklische Galoisweiterung ist.

Aufgabe 4 (Bosch „Algebra“, 4.3.2). Sei $L \subset \mathbb{C}$ ein Teilkörper, so dass L/\mathbb{Q} eine zyklische Galoisweiterung vom Grad 4 ist.

1. Zeigen Sie, dass die Erweiterung L/\mathbb{Q} genau einen echten Zwischenkörper besitzt.
2. Zeigen Sie, dass dieser Zwischenkörper bereits in \mathbb{R} liegt.

Aufgabe 5 (Bosch „Algebra“, 4.1.8). Sei L/K eine Galoisweiterung, sei $\alpha \in L - K$ und sei K' ein Zwischenkörper von L/K , der maximal mit der Bedingung $\alpha \notin K'$ ist. Sei E ein Zwischenkörper von L/K' mit $[E : K'] < \infty$.

1. Zeigen Sie, dass E/K' eine Galoisweiterung ist.
2. Zeigen Sie, dass die Galoisweiterung E/K' zyklisch ist.

Abgabe bis zum 31. Januar 2008, 8:00 Uhr