

# Übungen zur Algebra I

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh

Blatt 8 vom 6. Dezember 2007

---

**Aufgabe 1** (Einfache Körpererweiterungen; Bosch „Algebra“, 3.2.4). Zeigen Sie, dass jede endliche Körpererweiterung, deren Grad prim ist, einfach ist.

**Aufgabe 2** (Minimalpolynome; Bosch „Algebra“, 3.2.8). Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$  eine Zahl, die die Gleichung  $\alpha^3 + 2 \cdot \alpha - 1 = 0$  erfüllt; insbesondere ist  $\alpha$  algebraisch über  $\mathbb{Q}$ .

1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von  $\alpha$  über  $\mathbb{Q}$ .
2. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von  $\alpha^2 + \alpha$  über  $\mathbb{Q}$ .

**Aufgabe 3** (Transzendente Elemente).

1. Sei  $p \in \mathbb{N}$  prim. Geben Sie ein Beispiel für eine Körpererweiterung von  $\mathbb{F}_p$ , die nicht algebraisch ist.
2. Zeigen Sie, dass es in  $\mathbb{R}$  unendlich viele Elemente gibt, die transzendent über  $\mathbb{Q}$  sind.

**Aufgabe 4** (Bosch „Algebra“, 3.2.12). Sei  $L/K$  eine Körpererweiterung und seien  $\alpha, \beta \in L$ . Zeigen Sie, dass die Elemente  $\alpha$  und  $\beta$  genau dann algebraisch über  $K$  sind, wenn  $\alpha + \beta$  und  $\alpha \cdot \beta$  algebraisch über  $K$  sind.

**Aufgabe 5\*** (Nikolausaufgabe). Alle Jahre wieder lässt sich der Nikolaus auf ein Wettrennen mit seinem grazilen Rentier Ruprecht ein.

Ruprecht legt pro Schritt einen Meter zurück, der Nikolaus – trotz des viel zu langen Barts – hingegen beeindruckende eineinhalb Meter (maximal); jedoch kann der etwas füllige Nikolaus in der Zeit, in der Ruprecht drei Schritte tänzelt, nur zwei Schritte gehen.

Ruprecht schlägt für dieses Jahr folgende Streckenführung vor: Vom Haus des Nikolaus bis zum hundert Meter entfernten Pool und wieder zurück.

Wer wird gewinnen?

---

Abgabe bis zum 13. Dezember 2007, 8:00 Uhr