Übungen zur Algebra I

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh Blatt 9 vom 13. Dezember 2007

Aufgabe 1.

1. Ist der Funktionenkörper $\mathbb{F}_2(X)$ algebraisch abgeschlossen?
2. Zeigen Sie, dass endliche Körper nicht algebraisch abgeschlossen sind.

Aufgabe 2 (Algebraischer Abschluss**).** Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass L genau dann ein algebraischer Abschluss von K ist, wenn es zu jeder endlichen, algebraischen Körpererweiterung E/K von K einen K-linearen Körperhomomorphismus $E \longrightarrow L$ gibt.

Aufgabe 3 (Bosch „Algebra," 3.4.8**).** Sei $\sqrt[4]{2}$ die reelle, positive, vierte Wurzel von 2.

1. Berechnen Sie den Grad von $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ über $\mathbb{Q}$.
2. Bestimmen Sie alle Homomorphismen $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) \longrightarrow \mathbb{C}$ sowie deren Bilder.

Aufgabe 4. Seien α, $\beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^6 + \alpha^3 + 1 = 0$ und $\beta^3 - 1 = 0$.

1. Ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q}$ einfach?
2. Bestimmen Sie alle Automorphismen von $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Aufgabe 5*. Zeigen Sie, dass die reelle Zahl

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^n}$$

über $\mathbb{Q}$ transzendent ist.
Hinweis. Nehmen Sie an, diese Zahl wäre algebraisch über $\mathbb{Q}$ und setzen Sie die Partialsummen in das Minimalpolynom ein; leiten Sie nun mit einer geeigneten Abschätzung einen Widerspruch ab.

Abgabe bis zum 20. Dezember 2007, 8:00 Uhr